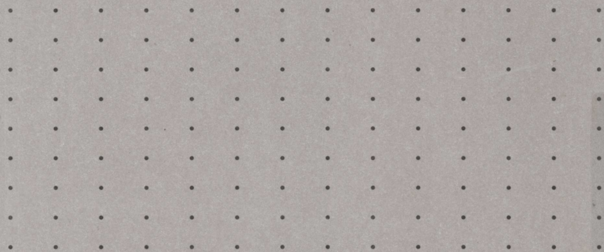
现代数学基础

10 奇异摄动问题中的渐近理论

■ 倪明康 林武忠



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



academic.hep.com.cn

定价 29.00 元

■ 学科类别：数学

现代数学基础

10 奇异摄动问题中的渐近理论



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是作者在华东师范大学数学系近几年给研究生上专业课所用的讲义基础上编写而成的。其特点在于作者既对奇异摄动理论中的基本问题做了深入浅出的论述，又对当前该领域的前沿问题——空间对照结构理论进行了介绍，还列举了丰富的例子便于读者掌握。

全书共分六章，各章内容为：基本概念，初值问题，两点边值问题，无穷大解的初边值问题，阶梯状空间对照结构，脉冲状空间对照结构型解。

本书的读者对象为大学高年级本科生、研究生以及各行各业对奇异摄动理论和方法感兴趣的科技工作者。

图书在版编目（CIP）数据

奇异摄动问题中的渐近理论 / 倪明康，林武忠.
—北京：高等教育出版社，2009.3
ISBN 978-7-04-025772-4

Ⅰ. 奇… Ⅱ. ①倪…②林… Ⅲ. 奇摄动-渐近方法 Ⅳ. O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 005711 号

策划编辑	赵天夫	责任编辑	张耀明	封面设计	张 楠
版式设计	马敬茹	责任校对	王 超	责任印制	陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2009年3月第1版
印 张	11.75	印 次	2009年3月第1次印刷
字 数	230 000	定 价	29.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 25772-00

前言

奇异摄动理论及方法是一门非常活跃和不断拓展的学科。奇异摄动的各种方法已经被广泛应用于自然科学的各个领域, 在解决实际问题中功不可没, 大量的动态数学模型都含有小参数, 对非线性的复杂方程在无法求出精确解的前提下, 求出一致有效的渐近解 (近似解) 尤其重要。从某种意义上讲这种渐近解是介于精确解和数值解之间的近似解, 既能进行理论分析, 也便于数值模拟。

奇异摄动理论和方法的发展已经经历了一个多世纪, 内容极其丰富。本书的大部分取之于俄文文献, 是本书第一作者留俄学习期间的必修材料。

本书由浅入深, 从奇异摄动基本概念一直谈到当今奇异摄动研究的最前沿工作 —— 空间对照结构理论。主要内容包括含有小参数的常微分方程初边值问题 (第一章, 第二章, 第三章); 具有无穷大解的初边值问题 (第四章); 空间对照结构理论 (第五章, 第六章), 其中最后两章内容是近年来奇异摄动理论发展的主流, 它包括了阶梯状空间对照结构和脉冲状空间对照结构。这两章只做了限于入门内容的介绍。对于有志于在该方向做进一步深入了解和研究的同行只能起到抛砖引玉的作用。

在本书的编写过程中得到了上海高校 E 研究院交大研究所张伟江教授和同仁们的关心和支持, 在此表示衷心的感谢。

作者在此也感谢为本书的出版给予帮助和支持的下列同志：朱振波、黄俊、沈仙夫、李海平、史威、陆海波、王爱峰、武利猛和潘建瑜。

由于作者水平有限, 书中难免由错误和不妥之处, 敬请读者批评指正, 以便对本书做进一步的修改和完善。

倪明康、林武忠

于上海

2008 年 7 月

目录

第一章　基本概念

1.1　正则摄动和奇异摄动

摄动又称扰动，一般可分为两类：正则摄动和奇异摄动（后面简称奇摄动）。它们是针对含有小参数的系统而言的．如果是正则摄动系统，则小参数为零和不为零时得到的解的差别不大，这时通常可用小参数为零时的系统（又称为退化系统）的解近似代替原系统的解．但是，如果系统是奇摄动的，则退化系统的解和原系统的解有本质区别．下面给出精确定义．

先看两类方程

$$A_0: \ L_0 u = f_0;$$
$$A_\mu: \ L_0 u + \mu L_1 u = f_0 + \mu f_1.$$

这里 L_0 和 L_1 是两个算子，f_0 和 f_1 是已知函数，μ 是小参数．u 是 t 的未知函数．方程 A_0 可以认为是某过程的简化模型，而 A_μ 则是 A_0 的扩张模型．μL_1 和 μf_1 就是摄动项．如果 A_0 和 A_μ 是微分方程，则给出相应的初边值后，就能得到初边值问题．记 $u_0(t)$ 是 A_0 的解．而 $u(t,\mu)$ 则是 A_μ 的解，$t \in D$，D 是定义域．

摄动理论的核心问题在于：当 $\mu \to 0$ 时，是否有 $\|u(t,\mu) - u_0(t)\| \to 0$，$\|\cdot\|$ 是适当的范数．为了回答这个问题，需要介绍若干基本概念和考察相关例子．

定义 1.1　当 $\mu \to 0$ 时，如果 $\sup\limits_{D} \|u(t,\mu) - u_0(t)\| \to 0$，则 A_μ 称为正则摄动问题．反之，则称为奇摄动问题．

例 1.1 讨论初值问题

$$A_\mu: \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -u + \mu t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u(0,\mu) = 1. \end{cases}$$

该问题的通解为

$$u(t,\mu) = (1+\mu)\mathrm{e}^{-t} + \mu(t-1).$$

而对应的退化问题 A_0 可令 $\mu = 0$ 得到

$$A_0: \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -u, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

A_0 的通解为

$$u_0(t) = \mathrm{e}^{-t}.$$

所以, 当 $\mu \to 0$ 时,

$$\sup_{[0,1]} \|u(t,\mu) - u_0(t)\| = \mu \max_{[0,1]} |\mathrm{e}^{-t} + t - 1| = \mu \mathrm{e}^{-1} \to 0.$$

由定义 1.1, A_μ 是正则摄动问题. 一般而言, 下面问题是正则摄动

$$A_\mu: \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u,t,\mu), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad u \in \Re^n, \\ u(0,\mu) = u^0, \end{cases}$$

这里 f 是充分光滑函数, t_0, u^0 是有限数.

注释 1.1 如果 A_μ 是定义在无限区间 $0 \leqslant t < +\infty$ 上, 则它一般是奇摄动问题.

例 1.2 讨论下面柯西问题

$$A_\mu: \begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -u + t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u(0,\mu) = 1. \end{cases}$$

很容易得到精确解

$$u(t,\mu) = (1+\mu)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\mu}} + t - \mu.$$

令 $\mu = 0$ 所得到的退化方程 A_0 是一个代数方程, 不是微分方程.

$$A_0: \quad 0 = -u + t.$$

可得退化解 $u_0(t) = t$. 因为

$$\sup_{[0,1]} \|u(t,\mu) - u_0(t)\| = \max_{[0,1]} |(1+\mu)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\mu}} - \mu| = 1,$$

所以由定义 1.1 可知 A_μ 是奇摄动问题. 在几何特性上, 奇摄动问题有两个显著特性:

1. 退化方程 A_0 的阶数比原方程 A_μ 要低, 甚至是代数方程. 这样退化解 $u_0(t)$ 一般不满足原问题所给出的所有定解条件.

2. 在 $[0,\delta]$ 上 $u(t,\mu)$ 和 $u_0(t)$ 相差很大, 而在 $[\delta,1]$ 上它们却充分靠近. 这里 δ 可充分小, 但固定.

区间 $[0,\delta]$ 称为边界层. 在边界层上 $u(t,\mu)$ 从初始值快速变到 $u_0(t)$.

定理 1.1 下面初值问题的边界层宽度为 $O(\mu)$.

$$A_\mu:\begin{cases}\mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=F(u,t), & 0\leqslant t\leqslant t_0\,(0<t_0<+\infty),\\ u(0,\mu)=u^0,\end{cases}$$

其中 $F_u(u_0(t),t)<0$.

证明 设 $u_0(t)$ 的影响域为 D, $D=\{(t,u)|0\leqslant t\leqslant t_0,\quad l_2\leqslant u(t)-u_0(t)\leqslant l_1\}$, l_1, l_2 为两固定实数.

令 $\underline{M}=\min\limits_D F(u,t)$, $\overline{M}=\max\limits_D F(u,t)$. $\alpha(t,\mu)$, $\beta(t,\mu)$ 由下面所定义的下解和上解:

$$\begin{cases}\mu\alpha'=\underline{M},\\ \alpha(0,\mu)=u^0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\mu\beta'=\overline{M},\\ \beta(0,\mu)=u^0.\end{cases}$$

解得

$$\alpha(t,\mu)=u^0+\mu^{-1}\underline{M}t,\quad \beta(t,\mu)=u^0+\mu^{-1}\overline{M}t,$$

则有

$$\alpha(t,\mu)\leqslant u(t,\mu)\leqslant\beta(t,\mu),\quad t\geqslant 0.$$

所以

$$\alpha(t_0,\mu)\leqslant u(t_0,\mu)\leqslant\beta(t_0,\mu).$$

考虑到

$$u(t_0,\mu)=u_0(t_0)+l_2,$$

推得

$$u^0+\mu^{-1}\underline{M}t_0\leqslant u_0(t_0)+l_2\leqslant u^0+\mu^{-1}\overline{M}t_0,$$

$$\overline{M}^{-1}(u_0(t_0)+l_2-u^0)\mu\leqslant t_0\leqslant\underline{M}^{-1}(u_0(t_0)+l_2-u^0)\mu,$$

即 $t_0=O(\mu)$. □

1.2 渐近级数

定义 1.2 当 $\mu \to 0$ 时, 如果函数 $U(t,\mu)$ 在 D 上满足

$$\sup_D |u(t,\mu) - U(t,\mu)| \to 0,$$

则称它为 $u(t,\mu)$ 在 D 上的渐近近似. 如果

$$\sup_D |u(t,\mu) - U(t,\mu)| = O(\mu^k),$$

则称它为 $u(t,\mu)$ 在 D 上的 μ 的 k 阶近似.

定义 1.3 对 A_μ 的解 $u(t,\mu)$ 用某种方法能构造出渐近近似, 则称该方法为渐近方法.

在本书中, 对奇摄动问题 A_μ, 我们将构造下面形式幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k(t,\mu). \tag{1.1}$$

这里 $u_k(t,\mu)$ 是有界函数, 它的部分和记为

$$U_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k u_k(t,\mu).$$

定义 1.4 如果 $U(t,\mu)$ 满足条件

$$\sup_D |u(t,\mu) - U_n(t,\mu)| = O(\mu^{n+1}), \tag{1.2}$$

则称级数 (1.1) 是 $u(t,\mu)$ 在 D 上当 $\mu \to 0$ 时的渐近级数或者渐近展开式.

注释 1.2 在实际操作中, 如果求解 (1.1) 中每一项的算法已确定, 虽然我们只求到 $U_n(t,\mu)$, 则也自然认为级数 (1.1) 已被构造.

注释 1.3 渐近级数 (1.1) 一般都是发散级数. 在 μ 固定, 当 $n \to \infty$ 时, 它通常不收敛于 $u(t,\mu)$.

这是因为我们把 (1.2) 写成 $\sup\limits_D |u(t,\mu) - U_n(t,\mu)| \leqslant C\mu^{n+1}$ 时, 这里 $C = C(n)$. 如果 n 固定, 当 $\mu \to 0$ 时, 则它趋向于零; 但是, 如果 μ 固定, 当 $n \to \infty$ 时, 则它却往往趋向于无穷.

例 1.3 讨论方程

$$\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t^2}u - \frac{1}{t}. \tag{1.3}$$

求方程的幂级数形式解 $u=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k u_k(t,\mu)$. 先把该级数代入方程 (1.3), 然后比较 μ 的同次幂, 可得确定幂级数系数 $u_k(t)$ 的一系列方程:

$$0=\frac{u_0}{t^2}-\frac{1}{t},\quad u_0'=-\frac{u_1}{t^2},\quad u_1'=-\frac{u_2}{t^2},\quad \cdots,u_{k-1}'=-\frac{u_k}{t^2},\quad \cdots$$

解得

$$u_0=-t,\quad u_1=t^2,\quad u_2=-(2!)t^3,\quad \cdots,u_k=(-1)^{k+1}(k!)t^{k+1},\quad \cdots$$

由此构造了级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(-1)^{k+1}(k!)t^{k+1}. \tag{1.4}$$

容易判别级数 (1.4) 在 $\Re\backslash\{0\}$ 上发散. 但是它在任意有限区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上是渐近级数. 下面证明这一点. 方程 (1.3) 的一个特解为

$$u(t,\mu)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mu t}}\int_0^t\frac{-1}{\mu s}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mu s}}\mathrm{d}s.$$

分部积分三次可得

$$u(t,\mu)=-t+\mu t^2-2\mu^2t^3+\mu^2\int_0^t 6s^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mu s}+\frac{1}{\mu t}}\mathrm{d}s. \tag{1.5}$$

考虑到

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mu s}+\frac{1}{\mu t}}\leqslant 1,\quad 0<s\leqslant t.$$

所以式 (1.5) 中最后的积分有

$$\mu^2\int_0^t 6s^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mu s}+\frac{1}{\mu t}}\mathrm{d}s\leqslant\mu^2\int_0^t 6s^2\mathrm{d}s\leqslant 2\mu^2t^3\leqslant 2\mu^2T^3=O(\mu^2).$$

由此可得

$$u(t,\mu)=-t+\mu t^2+O(\mu^2).$$

对式 (1.5) 继续分部积分

$$\begin{aligned}u(t,\mu)&=-t+\mu t^2-2\mu^2t^3+\cdots+\mu^n(-1)^{n+1}(n!)t^{n+1}+O(\mu^{n+1})\\&=\sum_{k=0}^{n}\mu^k(-1)^{k+1}(k!)t^{k+1}+O(\mu^{n+1}).\end{aligned} \tag{1.6}$$

等式 (1.6) 说明级数 (1.4) 是渐近级数.

1.3 正则摄动问题

讨论下面初值问题

$$A_\mu:\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(u,t,\mu), \quad 0\leqslant t\leqslant T, & (1.7)\\ u(0,\mu)=u^0, \quad u\in\Re^n. & (1.8)\end{cases}$$

摄动问题 (1.7),(1.8) 所对应的退化问题是

$$A_0:\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(u,t,0), \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

假设 A_0 有解 $u=\bar{u}(t)$, 并且在 $D=\{(u,t)|\|u-\bar{u}(t)\|\leqslant a, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad 0\leqslant \mu\leqslant\mu_0\}$ 上 $f(u,t,\mu)$ 无限次可微, 其中 a 和 μ_0 是两个正常数.

求初值问题 (1.7), (1.8) 具有下面级数形式的解

$$u(t,\mu)=u_0(t)+\mu u_1(t)+\cdots+\mu^k u_k(t)+\cdots. \tag{1.9}$$

把级数 (1.9) 代入 A_μ 并把 $f(u_0+\mu u_1+\cdots+\mu^k u_k+\cdots,t,\mu)$ 展开成 μ 的幂级数

$$\begin{aligned}&u_0'(t)+\mu u_1'(t)+\cdots+\mu^k u_k'(t)+\cdots\\&=f(u_0,t,0)+\mu(\bar{f}_u u_1+\varphi_1)+\cdots+\mu^k(\bar{f}_u u_k+\varphi_k)+\cdots\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k f_k, \qquad (1.10)\\&u_0(0)+\mu u_1(0)+\cdots+\mu^k u_k(0)+\cdots=u^0, \qquad (1.11)\end{aligned}$$

其中 $\bar{f}_u=f_u(u_0,t,0)$, $\varphi_1=\bar{f}_\mu=f_\mu(u_0,t,0)$, 而 $\varphi_k(k>1)$ 是 $u_i(i<k)$ 的已知函数.

比较等式 (1.10), (1.11) 两边 μ 的同次幂, 可得确定 $u_j(t)(j\geqslant 0)$ 的问题.

$$u_0'=f_0=f(u_0,t,0), \quad u_0(0)=u^0, \tag{1.12}$$

$$u_k'=f_k=\bar{f}_u u_k+\varphi_k, \quad u_k(0)=0, \quad k=1,2,\cdots. \tag{1.13}$$

显然, 式 (1.12) 就是问题 A_0, 所以 $u_0=\bar{u}(t)$. 而式 (1.13) 是线性问题, 所有的 $u_k(t)(k\geqslant 1)$ 都可以确定. 记级数 (1.9) 的前 $n+1$ 项部分和为

$$U_n(t,\mu)=\sum_{k=0}^{n}\mu^k u_k(t).$$

我们有下面的结论.

定理 1.2 对充分小的 μ, 问题 A_μ 有惟一解 $u(t,\mu)$, 并且级数 (1.9) 是渐近级数, 即

$$\|u(t,\mu)-U_n(t,\mu)\|\equiv\sup_{[0,T]}|u(t,\mu)-U_n(t,\mu)|=O(\mu^{n+1}). \tag{1.14}$$

在此我们不进行详细证明, 只介绍证明的思路. 感兴趣的读者可参看 [1].

记余项 $v(t,\mu)=u(t,\mu)-U_n(t,\mu)$, 把 $u=U_n+v$ 代入问题 A_μ, 写成下面形式

$$\begin{cases} v'=\bar{f}_u v+g(v,t,\mu), & (1.15)\\ v(0,\mu)=0, & (1.16)\end{cases}$$

这里 $g(v,t,\mu)=f(U_n(t,\mu)+v,t,\mu)-\bar{f}_u v-U_n'$, 它具有下面两条性质:

1)

$$\begin{aligned} g(0,t,\mu)&=f(U_n,t,\mu)-U_n'=\sum_{k=0}^{n}\mu^k f_k+O(\mu^{n+1})-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=0}^{n}\mu^k u_k\right)\\ &=\sum_{k=0}^{n}\mu^k(f_k-u_k')+O(\mu^{n+1})=O(\mu^{n+1}).\end{aligned}$$

2) 如果

$$\|v_1(t,\mu)\|\leqslant c_1\mu,\quad \|v_2(t,\mu)\|\leqslant c_1\mu(c_1\in\Re),$$

那么存在 $c_2>0$, $\mu_0>0$, 当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时有下面不等式

$$\sup_{[0,T]}|g(v_2,t,\mu)-g(v_1,t,\mu)|\leqslant c_2\mu\sup_{[0,T]}|v_2(t,\mu)-v_1(t,\mu)|. \tag{1.17}$$

这可根据中值定理得到

$$g(v_2,t,\mu)-g(v_1,t,\mu)=g_v^*(v_2-v_1), \tag{1.18}$$

这里 $g_v^*=g_v(\gamma_1+\theta(\gamma_2-\gamma_1),t,\mu),\quad 0<\theta<1.$

如果取 $\|v\|=O(\mu)$ 时, 则

$$\begin{aligned} g_v&=f_u(U_n+v,t,\mu)-\bar{f}_u\\ &=f_u(u_0+O(\mu)+v,t,\mu)-f_u(u_0,t,0)\\ &=O(\mu+\|v\|)=O(\mu), \end{aligned}\tag{1.19}$$

把式 (1.19) 代入式 (1.18) 可得式 (1.17), 把式 (1.15), (1.16) 化成等价的积分方程

$$v(t,\mu)=\int_0^t\Phi(t,s)g(v(s,\mu),s,\mu)\mathrm{d}s\triangleq G(v,t,\mu). \tag{1.20}$$

可见积分算子 $G(v,t,\mu)$ 也具有性质 1), 2), $\|G(0,t,\mu)\|=O(\mu^{n+1})$. 性质 2) 说明当 $\|v\|$ 和 μ 充分小时 $(c_2\mu<1)$ G 是压缩算子. 推出积分方程有惟一解 $v=v^*(t,\mu)$, 并且 $\|v(t,\mu)\|=O(\mu^{n+1})$. 这样就证明了定理 1.2.

注释 1.4 如果构造 n 阶渐近解 $U_n(t,\mu)$, 只要求 $f(u,t,\mu)$ 在 D 上 $n+1$ 阶连续可微.

注释 1.5 对于正则摄动问题, 渐近级数的系数 $u_k(t)$ 不依赖于 μ.

一般而言, 正则摄动问题比较简单, 在此不作更多的阐述. 从下章开始, 主要介绍有关各类奇摄动问题研究的结果.

第二章　初值问题

2.1　简单初值问题

许多数学模型在无量纲化后都可归结为下面形式

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = F(z,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, & (2.1) \\ z(0,\mu) = z^0, & (2.2) \end{cases}$$

其中 $\mu > 0$ 是小参数, $z \in \Re$, T 是某个给定的正数.

由于所提问题 (2.1) 是非线性的, 求精确解 $z_\mu(t)$ 并不容易, 所以寻找 $z_\mu(t)$ 的近似解 $U(t,\mu)$ 十分重要, 尤其在解决实际问题时更为迫切. 考虑到这类问题中含有小参数 μ, 所以求渐近解顺理成章, 不失为一种很好的方法, 多年来的实践也证明了这一点. 由于小参数 μ 出现在最高阶导数项前, 所以会产生边界层. 从例 1.2 即可看出. 解的结构与正则问题的解截然不同, 包含了所谓的边界层项. 边界层项的显著特点是在离开边界层时它是指数衰减的.

对奇摄动问题的研究目前主要讨论下面两点:

1) 所提问题解的存在性;

2) 渐近解的构造和余项估计.

而 1) 的证明和 2) 中的余项估计往往是同时完成的. 我们先给出所需要的条件

[$\mathrm{H}_{2.1}$]　假设 F, F_z 在 $D = \{(z,t) \| z| \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上连续, 其中 l 是某个固定正数.

[$\mathrm{H}_{2.2}$]　假设退化方程 $0 = F(\bar{z},t)$ 有孤立根 $\bar{z} = \varphi(t)$, 且满足稳定性条件 $F_z(\varphi(t), t) < 0$.

其他所需条件将在渐近解的构造过程中给出.

2.1.1 形式渐近解的构造

我们所构造的形式级数为两部分的和

$$z = \bar{z}(t,\mu) + \Pi z(\tau,\mu), \quad \tau = \frac{t}{\mu}, \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{z}(t,\mu) &= \bar{z}_0(t) + \mu\bar{z}_1(t) + \cdots + \mu^n\bar{z}_n(t) + \cdots, \\ \Pi z(\tau,\mu) &= \Pi_0 z(\tau) + \mu\Pi_1 z(\tau) + \cdots + \mu^n\Pi_n z(\tau) + \cdots. \end{aligned} \tag{2.4}$$

这里正则级数 $\bar{z}(t,\mu)$ 的系数只依赖于 t, 而边界层级数 $\Pi z(\tau,\mu)$ 的系数却依赖于 $\tau = t/\mu$.

用形式级数 (2.3) 来构造渐近解的方法称为边界层函数法, 级数 $\Pi z(\tau,\mu)$ 的系数称为边界函数.

正则级数 $\bar{z}(t,\mu)$ 的系数可这样来确定, 把它代入 (2.1)

$$\mu\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t} = F(\bar{z},t), \tag{2.5}$$

比较 μ 同次幂

$$\begin{aligned} \mu^0: &\quad F(\bar{z}_0(t),t) = 0, \\ \mu^1: &\quad \frac{\mathrm{d}\bar{z}_0}{\mathrm{d}t} = F_z(\bar{z}_0(t),t)\bar{z}_1 = \bar{F}_z\bar{z}_1, \\ &\cdots \\ \mu^n: &\quad \frac{\mathrm{d}\bar{z}_{n-1}}{\mathrm{d}t} = \bar{F}_z\bar{z}_n + H_{n-1}, \\ &\cdots \end{aligned}$$

这里第一个方程就是退化方程, 因此 $\bar{z}_0 = \varphi_0(t)$. 从第二个方程起所有关于 $\bar{z}_i(t)$ $(i \geqslant 1)$ 的方程都是代数线性方程, 而 H_{n-1} 是 t, $\bar{z}_0(t)$, $\cdots$, $\bar{z}_{n-1}(t)$ 的已知函数, 所以 $\bar{z}_i$ 都能惟一确定.

确定边界层级数 $\Pi z(\tau,\mu)$ 的各项可这样做, 需要把 z 代入 (2.1):

$$\frac{\mathrm{d}\Pi z}{\mathrm{d}\tau} + \mu\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t} = F(\bar{z} + \Pi z, t), \tag{2.6}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\Pi z}{\mathrm{d}\tau} = F(\bar{z}(\mu\tau) + \Pi z, \mu\tau) - F(\bar{z}(\mu\tau), \mu\tau), \tag{2.7}$$

再比较 μ 同次幂, 可得确定各系数的方程 (这里仅限于求零次项和一次项系数)

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_0 z}{\mathrm{d}\tau} = F(\varphi_0(0) + \Pi_0 z, 0) - F(\varphi_0(0), 0), \tag{2.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_1 z}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{F}_z[\Pi_1 z + \varphi_0'(0)\tau + \bar{z}_1(0)] + \tilde{F}_t\tau - \bar{F}_z(\varphi_0'(0)\tau + \bar{z}_1(0)) - \bar{F}_t\tau. \tag{2.9}$$

把方程 (2.9) 写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Pi_1 z = \tilde{F}_z \Pi_1 z + h_1, \tag{2.10}$$

其中 $h_1 = \Delta F_z(\varphi_0'(0)\tau + \bar{z}_1(0)) + \Delta F_t \tau$, $\Delta F_z = \tilde{F}_z - \bar{F}_z$, $\Delta F_t = \tilde{F}_t - \bar{F}_t$.

在方程 (2.8)—(2.10) 中 "$-$" 表示函数在 $(\bar{z}_0, 0)$ 取值, 而 "$\sim$" 表示函数在 $(\varphi_0(0)+\Pi_0 z, 0)$ 取值.

上面关于 $\Pi_0 z$ 的方程是非线性的, 而关于 $\Pi_i z\,(i \geqslant 1)$ 的方程都是线性的, 且非齐次项 $h_i\,(i \geqslant 1)$ 只依赖于已知函数 $\Pi_0 z, \Pi_1 z, \cdots, \Pi_{i-1} z$.

因为关于 $\bar{z}_i(t)\,(i \geqslant 0)$ 的方程都是代数方程, 所以不需要给出初值条件. 关于 $\Pi_i z$ 的初值可以把 $z(t,\mu) = \bar{z} + \Pi z$ 代入初始条件 (2.2) 得到

$$\Pi_0 z(0) = z^0 - \varphi_0(0), \quad \Pi_1 z(0) = -\bar{z}_1(0), \quad \cdots. \tag{2.11}$$

可见 $\Pi_0 z, \Pi_1 z$ 由相应的柯西问题确定, 它们的存在性毫无疑问. 高阶渐近解 $\Pi_i z\,(i \geqslant 2)$ 的构造原则上是类似的, 只是在技术层面上复杂一点.

引理 2.1 边界函数满足下面不等式

$$|\Pi_0 z| < C_0 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau}, \quad |\Pi_1 z| < C_1 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau}, \tag{2.12}$$

这里 $C_0, C_1 > 0$ 和 $\underline{\kappa}_0 > \underline{\kappa}_1 > 0$.

证明 把求 $\Pi_0 z$ 的问题写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_0 z}{\mathrm{d}\tau} = F(\varphi_0(0) + \Pi_0 z, 0) - F(\varphi_0(0), 0), & (2.13) \\ \Pi_0 z(0) = z^0 - \varphi_0(0), & (2.14) \end{cases}$$

把 (2.13) 式右端的函数差由中值公式写成

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_0 z}{\mathrm{d}\tau} = F_z(\varphi_0(0) + \theta \Pi_0 z, 0)\Pi_0 z, \ 0 < \theta < 1,$$

由此解得

$$\Pi_0 z(\tau) = (z^0 - \varphi(0))\mathrm{e}^{\int_0^\tau F_z(\varphi_0(0)+\theta\Pi_0 z, 0)\,\mathrm{d}s}.$$

考虑到 $F_z(\varphi_0(0), 0) < 0$, $\lim\limits_{\tau\to\infty} \Pi z(\tau) = 0$, 所以根据保号性, 存在 $\tau_0 > 0$ 和 $\underline{\kappa}_0$, $\bar{\kappa}_0 > 0$, 使得 $\tau \geqslant \tau_0$ 时, 有下面不等式成立

$$-\bar{\kappa}_0 < F_z(\varphi_0(0) + \theta \Pi_0 z, 0) < -\underline{\kappa}_0.$$

这时

$$|\Pi_0 z| \leqslant (|z^0 - \varphi_0(0)|\mathrm{e}^{\int_0^{\tau_0} F_z\,\mathrm{d}s})\mathrm{e}^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \underline{\kappa}_0\,\mathrm{d}s}$$

因为 τ_0 是固定值, 所以上式圆括号内的值有上界 C_0, 即

$$|\Pi_0 z| < C_0 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau}. \tag{2.15}$$

为了得到 $\Pi_1 z$ 的估计式, 必须先对 ΔF_z, $\Delta F_z \tau$ 和 $\Delta F_t \tau$ 进行估计, 以便得到 h_1 的估计.

根据中值定理

$$\Delta F_z \tau = \tau F_{zz}(z_0(0) + \theta_1 \Pi_0 z, 0)\Pi_0 z,$$

其中 $0 < \theta_1 < 1$.

为了利用已得到的估计 (2.12) 来估计 $\tau \Pi_0 z$, 可这样做:

$$\begin{aligned}|\tau \Pi_0 z| &< C_0 \tau \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau} \\ &= C_0 \tau \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau + (\underline{\kappa}_1 - \underline{\kappa}_0)\tau} \\ &= C_0 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau} \tau \mathrm{e}^{(\underline{\kappa}_1 - \underline{\kappa}_0)\tau}.\end{aligned}$$

可以取 $\underline{\kappa}_1 < \underline{\kappa}_0$, 所以 $\tau \mathrm{e}^{(\underline{\kappa}_1 - \underline{\kappa}_0)\tau}$ 是有界量. 这样 $|\tau \Pi_0 z| < C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau}$, 进而 $|\Delta F_z \tau| < C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau}$. 以后在进行估计时我们常用一个符号 C 来表示不同的常数, 因为在证明过程中它们不起本质作用, 只表示常数. 对 $\Delta F_t \tau$ 以及整个 h_1 也具有相同的估计. 现在利用已知公式可对 $\Pi_1 z$ 进行估计:

$$\begin{aligned}|\Pi_1 z| &< C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau} + C\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0(\tau - s)}\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 s}\,\mathrm{d}s \\ &= C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau} + C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau}\int_0^\tau \mathrm{e}^{(\underline{\kappa}_0 - \underline{\kappa}_1)s}\,\mathrm{d}s \\ &= C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau} + C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau}\mathrm{e}^{(\underline{\kappa}_0 - \underline{\kappa}_1)\tau} \\ &= C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau} + C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau} \\ &< C_1 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

这样就得到了对引理 2.1 中 (2.12) 的边界层函数估计. 事实上对 $k > 1$ 都可以得到下面估计式

$$|\Pi_k z| < C_k \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_k \tau},$$

这里有 $\underline{\kappa}_k < \underline{\kappa}_{k-1}$. □

2.1.2 解的存在性和余项估计

定理 2.1 如果满足条件 [$\mathrm{H}_{2.2}$] 和要求 F 在 D 内二阶偏导数连续, 那么有下面渐近表达式

$$z(t,\mu) = \varphi(t) + \Pi_0 z(\tau) + r_1(t,\mu),$$

其中 $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant H} |r_1(t,\mu)| < C\mu$.

定理 2.1 的证明要用到恰帕雷金定理, 为此我们先叙述一下该定理.

引理 2.2 (恰帕雷金定理) 假设 $z(t)$ 是下面初值问题在 $[0,T]$ 上的解

$$\begin{cases} Lz = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - F(z,t) = 0, \\ z(0) = z^0. \end{cases}$$

又假设存在两个函数 $\beta(t)$ 和 $\alpha(t)$, 它们分别称为上解和下解, 并具有下面性质:

1) $\beta(t) \geqslant \alpha(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$,

2) $L\beta > 0, \quad L\alpha < 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$.

那么在区间 $[0,T]$ 上成立不等式

$$\alpha(t) < z(t) < \beta(t).$$

下面用恰帕雷金定理证明定理 2.1.

证明 构造 (2.1), (2.2) 合适的上下解

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \varphi(t) + \Pi_0 z + \mu r + \mu \Pi_{1\beta} z, \\ \alpha(t) &= \varphi(t) + \Pi_0 z - \mu r + \mu \Pi_{1\alpha} z, \end{aligned} \tag{2.17}$$

这里 r 是某个正常数, 对它的要求在构造过程中给出, 而 $\Pi_{1\beta}z, \Pi_{1\alpha}z$ 是 $\Pi_1 z$ 的变形, 它们分别满足下面的方程和初值

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_{1\beta}z}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{F}_z \Pi_{1\beta} z + \Delta F_z(\varphi'(0)\tau + r) + \Delta F_t \tau + \omega \mathrm{e}^{-\kappa_0 \tau}, \\ \Pi_{1\beta}z(0) = -\varphi(0), \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_{1\alpha}z}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{F}_z \Pi_{1\alpha} z + \Delta F_z(\varphi'(0)\tau + r) + \Delta F_t \tau - \omega \mathrm{e}^{-\kappa_0 \tau}, \\ \Pi_{1\alpha}z(0) = -\varphi(0), \end{cases} \tag{2.19}$$

这里的 ω 是个正常数, 它也在构造过程中选定.

对上面选取的上下解 $\beta(t), \alpha(t)$ 恰帕雷金定理中的性质 1) 显然满足.

下面对上解 $\beta(t)$ 来验证恰帕雷金定理中的性质 2).

$$\begin{aligned} L\beta &= \mu \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - F(\beta, t) \\ &= \mu\varphi'(t) + \frac{\mathrm{d}\Pi_0 z}{\mathrm{d}\tau} + \mu \frac{\Pi_{1\beta} z}{\mathrm{d}t} - F(\varphi(t) + \Pi_0 z + r\mu + \mu \Pi_{1\beta} z, t). \end{aligned} \tag{2.20}$$

把 (2.20) 中最后一项表示成

$$\begin{aligned} & F(\varphi(t) + \Pi_0 z + \mu r + \mu \Pi_{1\beta} z, t) \\ = {} & F(\varphi(t) + \mu r, t) + F(\varphi(\tau\mu) + \Pi_0 z + r\mu + \mu \Pi_{1\beta} z, \tau\mu) - F(\varphi(\tau\mu) + \mu r, \tau\mu) \\ = {} & \bar{F} + \Pi F, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{F}&=F(\varphi(t)+\mu r,t)=F(\varphi(t),t)+\mu rF_z(\varphi(t),t)+\frac{1}{2}\mu^2r^2F^*_{zz},\\ \Pi F&=F(\varphi(\tau\mu)+\Pi_0z+r\mu+\mu\Pi_{1\beta}z,\tau\mu)-F(\varphi(\tau\mu)+\mu r,\tau\mu)\\ &=\Pi F(0)+\mu\Pi F'_\mu(0)+\frac{1}{2}\mu^2\Pi F''_{\mu^2}(\theta\mu),\end{aligned}\tag{2.21}$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$, F^*_{zz} 表示 $F_{zz}(z,t)$ 的变量子在区间 $(\varphi(t),\varphi(t)+\mu r)$ 当中某一点取值.

通过直接计算有

$$\begin{aligned}\Pi F(0)&=F(\varphi(0)+\Pi_0z,0)-F(\varphi(0),0)=\frac{\mathrm{d}\Pi_0z}{\mathrm{d}\tau},\\ \Pi F'(0)&=\Delta F_z(\varphi_0'(0)\tau+r)+\Delta F_t\tau+\tilde{F}_z\Pi_{1\beta}z=\frac{\mathrm{d}\Pi_{1\beta}z}{\mathrm{d}\tau}-\omega\mathrm{e}^{-\kappa_0\tau},\\ \Pi F''(\mu)&=\tilde{\Delta}F_{zz}(\varphi(\tau\mu)\tau+r)^2+2\tilde{\tilde{F}}_{zz}(\varphi(\tau\mu)\tau+r)\Pi_{1\beta}z+\tilde{\tilde{F}}_{zz}\Pi^2_{1\beta}z\\ &\quad-2\tilde{\Delta}F_{zt}(\varphi(\tau\mu)+r)\tau+2\tilde{\tilde{F}}_{zt}\Pi_{1\beta}z\tau+\tilde{\Delta}F_{tt}\tau^2+\tilde{\Delta}F_z\bar{z}''(\tau\mu)\tau^2,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\Delta}F_{zz}=\tilde{\tilde{F}}_{zz}-\bar{\tilde{F}}_{zz}$, 而 “=” 表示函数在 $(\varphi(\tau\mu)+r\mu,\tau\mu)$ 取值, “≈” 表示函数在 $(\varphi(\tau\mu)+\Pi_0z+r\mu+\mu\Pi_{1\beta}z,\tau\mu)$ 取值.

在下面的估计中要用到 $\Pi F''$ 的有界性. 从 $\Pi F''$ 的表达式容易给出 $\Pi F''$ 的有界性估计, 在此省略.

我们对上解继续进行估计

$$\begin{aligned}L\beta&=\mu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Pi_0z}{\mathrm{d}\tau}+\mu\frac{\mathrm{d}\Pi_{1\beta}z}{\mathrm{d}\tau}-(\Pi F+\bar{F})\\ &=\mu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Pi_0z}{\mathrm{d}\tau}+\mu\frac{\mathrm{d}\Pi_{1\beta}z}{\mathrm{d}\tau}-\left[\frac{\mathrm{d}\Pi_0z}{\mathrm{d}\tau}+\mu\frac{\mathrm{d}\Pi_{1\beta}z}{\mathrm{d}\tau}-\mu\omega\mathrm{e}^{-\kappa_0\tau}\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{2}\mu^2\Pi F''(\theta\mu)+F(\varphi(t),t)+\mu rF_z(\varphi(t),t)+\frac{1}{2}\mu^2r^2F^*_{zz}\right]\\ &=\mu[\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}-rF_z(\varphi(t),t)]+\mu\omega\mathrm{e}^{-\kappa_0\tau}-\frac{1}{2}\mu^2[r^2F^*_{zz}+\Pi F''(\theta\mu)].\end{aligned}\tag{2.22}$$

在 (2.22) 中对足够大的 r, 总可以做到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}-rF_z(\varphi(t),t)>0,$$

而第二项对任意 ω 都为正, 至于最后一项考虑到 $\Pi F''$ 的有界性对任何 r,ω 是 $O(\mu^2)$, 所以 $L\beta>0$. 根据恰帕雷金定理可得

$$\alpha(t)\leqslant z(t,\mu)\leqslant\beta(t),$$

或者

$$-\mu r+\mu\Pi_{1\alpha}z\leqslant z(t,\mu)-\varphi(t)-\Pi_0z\leqslant\mu r+\mu\Pi_{1\beta}z,$$

从而立即推得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant H}|z(t,\mu)-\varphi(t)-\Pi_0 z|\leqslant C\mu.$$

这样定理 2.1 证毕. □

对更高阶渐近表达式也有类似结果.

定理 2.2 如果满足条件 $[\mathrm{H}_{2.2}]$, 并且要求函数 F 在 D 内关于 z 有 $(n+2)$ 阶连续偏导数, 则有下面渐近表达式

$$\begin{aligned}&z(t,\mu)=Z_n(t,\mu)+r_{n+1}(t,\mu),\\&Z_n(t,\mu)=\bar{z}_0(t)+\cdots+\mu^n\bar{z}_n(t)+\Pi_0 z(\tau)+\cdots+\mu^n\Pi_n z(\tau),\end{aligned}$$

并且 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant H}|r_{n+1}(t,\mu)|<C\mu^{n+1}$.

除了用恰帕雷金上下解方法之外, 还有许多方法可以证明渐近解的存在性和余项估计. 例如把微分方程化为积分方程的方法, 但是把边值问题化成积分方程来处理是相当复杂的.

2.2 Tikhonov 系统

1948 年俄罗斯天才数学家 Tikhonov A. 发表了第一篇有关奇摄动论文 “微分方程解对小参数的依赖性”[2], 从此开创了微分方程领域研究的新方向 —— 奇摄动理论.

给出下面 Tikhonov 系统和初值

$$\begin{cases}\mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=F(z,y,t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, & (2.23)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(z,y,t), & (2.24)\\ z(0,\mu)=z^0,\quad y(0,\mu)=y^0, & (2.25)\end{cases}$$

这里 $\mu>0$ 是小参数, $z\in\Re^M$, $y\in\Re^m$, 函数 F, f 在 $G=\{\|z\|\leqslant a,\quad \|y\|\leqslant a,\quad 0\leqslant t\leqslant T\}$ 上连续且偏导数连续, 并要求退化系统

$$\begin{cases}0=F(\bar{z},\bar{y},t), & (2.26)\\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t}=f(\bar{z},\bar{y},t), & (2.27)\\ \bar{y}(0)=y^0 & (2.28)\end{cases}$$

有解 $\bar{z}=\bar{z}(t)$, $\bar{y}=\bar{y}(t)$. 这实际上可这样来做, 要求方程 (2.26) 关于 $\bar{z}$ 有解, 即 $\bar{z}=\varphi(\bar{y},t)$. 把它代入到 (2.27), 得到关于 $\bar{y}$ 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t}=f(\varphi(\bar{y},t),\bar{y},t),\tag{2.29}$$

求解初值问题 (2.28), (2.29) 可得 $\bar{y}=\bar{y}(t)$, 再得到 $\bar{z}=\bar{z}(t)\equiv\varphi(\bar{y}(t),t)$. 把上面求退化解的过程写成条件

[$H_{2.3}$] 假设方程 $F(\bar{z},\bar{y},t)=0$ 在 $D=\{|y|\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 上有孤立根 $\bar{z}=\varphi(\bar{y},t)$, 并且式 (2.27), (2.28) 关于该孤立根有惟一解 (不排除 $F(\bar{z},\bar{y},t)=0$ 有多个根的情况).

[$H_{2.4}$] 假设辅助系统

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau}=F(\tilde{z},y,t)$$

的平衡点 $\tilde{z}=\varphi(y,t)$ 是渐近稳定的 (y, t 看作参数).

[$H_{2.5}$] 初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau}=F(\tilde{z},y^0,0),\quad \tilde{z}(0)=z^0$$

的解 $\tilde{z}=\tilde{z}(\tau)$ 存在,且 $\lim\limits_{\tau\to\infty}\tilde{z}(\tau)=\varphi(y^0,0)$.

定理 2.3 (Tikhonov 定理) 如果满足条件 [$H_{2.3}$]—[$H_{2.5}$], 那么对充分小的 μ 问题 (2.23)—(2.25) 的解存在, 且有极限等式 [2]

$$\begin{cases}\lim\limits_{\mu\to0}y(t,\mu)=\bar{y}(t), & 0\leqslant t\leqslant T,\\ \lim\limits_{\mu\to0}z(t,\mu)=\bar{z}(t), & 0<t\leqslant T.\end{cases}$$

Tikhonov 定理通常也称为极限转移定理, 它首次揭示了当 $\mu\to0$ 时退化解和精确解之间的关系, 指出了当 μ 充分小时慢变量 $\bar{y}(t)$ 在整个感兴趣的区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上是 $y(t,\mu)$ 很好的近似, 但快变量 $\bar{z}(t)$ 只在边界层外的区间 $0<t\leqslant T$ 上与 $z(t,\mu)$ 很吻合. 为了求得整个区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上一致有效的渐近解, 需要在边界层 $[0,\delta]$ 上添加边界层函数. 俄罗斯著名数学家 Vasil'eva A. 创立了边界层函数法 [1]. 至今为止, 它是奇摄动问题研究中最行之有效的方法之一. 下面将介绍这种方法.

2.2.1 渐近解的构造

为构造初值问题 (2.23)—(2.25) 一致有效的渐近解, 我们先给出下面条件:

[$H_{2.6}$] 假设 $F(z,y,t)$, $f(z,y,t)$ 在 G 上无限次可微.

[$H_{2.7}$] 假设 $Re\lambda_i(t)<0$, $0\leqslant t\leqslant T$, $i=1,\cdots,M$, 其中 $\lambda_i(t)(i=1,\cdots,M)$ 是矩阵 $\bar{F}_z(t)=F_z(\bar{z}(t),\bar{y}(t),t)$ 的特征值.

通常用条件 [$H_{2.7}$] 来代替 [$H_{2.4}$], 因为它便于操作. 为讨论方便起见, 记 $x=(z^{\mathrm{T}},y^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, 所以 $x\in\Re^{M+m}$.

我们将构造 (2.23)—(2.25) 具有下面形式的渐近解

$$x(t,\mu)=\bar{x}(t,\mu)+\Pi x(\tau_0,\mu),\quad \tau_0=\frac{t}{\mu},\tag{2.30}$$

其中

$$\bar{x}(t,\mu)=\bar{x}_0(t)+\mu\bar{x}_1(t)+\cdots+\mu^k\bar{x}_k(t)+\cdots\tag{2.31}$$

是渐近解的正则部分,

$$\Pi x(\tau_0,\mu)=\Pi_0 x(\tau_0)+\mu\Pi_1 x(\tau_0)+\cdots+\mu^k\Pi_k x(\tau_0)+\cdots \tag{2.32}$$

是渐近解的边界层部分.

把 (2.30) 代入 (2.23), (2.24) 得下面等式

$$\mu\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Pi z}{\mathrm{d}\tau_0}=F(\bar{z}+\Pi z,\bar{y}+\Pi y,t), \tag{2.33}$$

$$\mu\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Pi y}{\mathrm{d}\tau_0}=f(\bar{z}+\Pi z,\bar{y}+\Pi y,t). \tag{2.34}$$

把 (2.33), (2.34) 右端的 F 和 f 按尺度 t 和 τ_0 分成两部分

$$F=\bar{F}+\Pi F,\quad f=\bar{f}+\Pi f.$$

例如

$$\begin{aligned}F(\bar{z}+\Pi z,\bar{y}+\Pi y,t)&=F(\bar{z}(t,\mu),\bar{y}(t,\mu),t)+[F(\bar{z}(\tau_0\mu,\mu)+\Pi z(\tau_0,\mu),\bar{y}(\tau_0\mu,\mu)\\&\quad+\Pi y(\tau_0,\mu),\tau_0\mu)-F(\bar{z}(\tau_0\mu,\mu),\bar{y}(\tau_0\mu,\mu),\tau_0\mu)]\\&\equiv\bar{F}+\Pi F.\end{aligned}$$

于是 (2.33), (2.34) 可写成

$$\mu\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Pi z}{\mathrm{d}\tau_0}=\bar{F}+\Pi F, \tag{2.35}$$

$$\mu\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Pi y}{\mathrm{d}\tau_0}=\mu f+\mu\Pi f. \tag{2.36}$$

将 (2.31), (2.32) 代入 (2.35), (2.36) 中, 并把 $\bar{F}$, ΠF, f, Πf 展开成 μ 的幂级数

$$\begin{aligned}\bar{F}&=F(\bar{z}_0(t)+\mu\bar{z}_1(t)+\cdots,\bar{y}_0(t)+\mu\bar{y}_1(t)+\cdots,t)\\&=F(\bar{z}_0(t),\bar{y}_0(t),t)+\mu[\bar{F}_z(t)\bar{z}_1(t)+\bar{F}_y(t)\bar{y}_1(t)]+\cdots\\&\quad+\mu^k[\bar{F}_z(t)\bar{z}_k+\bar{F}_y(t)\bar{y}_k+F_k(t)]+\cdots\\&=\bar{F}_0+\mu\bar{F}_1+\cdots+\mu^k\bar{F}_k+\cdots.\end{aligned}$$

这里 $\bar{F}_z(t)$, $\bar{F}_y(t)$ 分别为 $F_z(z,y,t), F_y(z,y,t)$ 在 $(\bar{z}_0(t),\bar{y}_0(t),t)$ 处取值的矩阵函数, $F_k(t)$ 是 $\bar{z}_i(t)$, $\bar{y}_i(t)$ $(i<k)$ 的复合向量函数.

$$\begin{aligned}\Pi F&=F(\bar{z}_0(\tau_0\mu)+\Pi_0 z(\tau_0)+\mu(\bar{z}_1(\tau_0\mu)+\Pi_1 z(\tau_0))+\cdots,\bar{y}_0(\tau_0\mu)\\&\quad+\Pi_0 y(\tau_0)+\mu(\bar{y}_1(\tau_0\mu)+\Pi_1 y(\tau_0))+\cdots,\tau_0\mu)\\&\quad-F(\bar{z}_0(\tau_0\mu)+\mu\bar{z}_1(\tau_0\mu)+\cdots,\bar{y}_0(\tau_0\mu)+\mu\bar{y}_1(\tau_0\mu)+\cdots,\tau_0\mu)\\&=[F(\bar{z}_0(0)+\Pi_0 z(\tau_0),\bar{y}_0(0)+\Pi_0 y(\tau_0),0)-F(\bar{z}_0(0),\bar{y}_0(0),0)]\\&\quad+\mu[F_z(\tau_0)\Pi_1 z(\tau_0)+F_y(\tau_0)\Pi_1 y(\tau_0)+G_1(\tau_0)]+\cdots\\&\quad+\mu^k[F_z(\tau_0)\Pi_k z(\tau_0)+F_y(\tau_0)\Pi_k y(\tau_0)+G_k(\tau_0)]+\cdots\\&=\Pi_0 F+\mu\Pi_1 F+\cdots+\mu^k\Pi_k F+\cdots,\end{aligned}$$

这里 $F_z(\tau_0)$, $F_y(\tau_0)$ 分别为 $F_z(z,y,t)$, $F_y(z,y,t)$ 在 $(\bar{z}_0(0)+\Pi_0 z(\tau_0), \bar{y}_0(0)+\Pi_0 y(\tau_0), 0)$ 处取值的矩阵函数, $G_k(\tau_0)$ 是 $\Pi_i z$, $\Pi_i y$ $(i<k)$ 的已知复合向量函数.

同样可以对 $\bar{f}$, Πf 进行这样的展开.

在 (2.35), (2.36) 中先按尺度 t, τ_0 进行分离, 再比较 μ 的同次幂系数可得到确定 $\bar{x}_k(t)$, $\Pi_k x(\tau_0)$ $(k\geqslant 0)$ 的方程.

渐近解的主项由下面方程组确定

$$0=\bar{F}_0\equiv F(\bar{z}_0(t),\bar{y}_0(t),t),\quad \frac{\mathrm{d}\bar{y}_0}{\mathrm{d}t}=\bar{f}_0\equiv f(\bar{z}_0(t),\bar{y}_0(t),t), \tag{2.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_0 z}{\mathrm{d}\tau_0}=\Pi_0 F\equiv F(\bar{z}_0(0)+\Pi_0 z,\bar{y}_0(0)+\Pi_0 y,0),\quad \frac{\mathrm{d}\Pi_0 y}{\mathrm{d}\tau_0}=0. \tag{2.38}$$

而渐近解从一次项开始都由线性方程组确定

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\bar{z}_{k-1}}{\mathrm{d}t}=\bar{F}_k\equiv \bar{F}_z(t)\bar{z}_k+\bar{F}_y(t)\bar{y}_k+F_k(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_k}{\mathrm{d}t}=\bar{f}_k\equiv \bar{f}_z(t)\bar{z}_k+\bar{f}_y(t)\bar{y}_k+f_k(t),\end{cases} \tag{2.39}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\Pi_k z}{\mathrm{d}\tau_0}=\Pi_k F\equiv F_z(\tau_0)\Pi_k z+F_y(\tau_0)\Pi_k y+G_k(\tau_0),\\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_k y}{\mathrm{d}\tau_0}=\Pi_{k-1}f,\end{cases} \tag{2.40}$$

其中 $F_k(t)$, $f_k(t)$ 都是 $\bar{z}_i(t),\bar{y}_i(t)$ 的已知复合函数, 而 $G_k(\tau_0)$, $\Pi_{k-1}f$ 都是 $\Pi_i z(\tau_0)$, $\Pi_i y(\tau_0)\,(i=1,\cdots,k-1)$ 的已知复合函数.

为了从方程组 (2.37)—(2.40) 求出 $\bar{x}_k(t)$, $\Pi_k x(\tau_0)$, 还需要给出初值条件. 把 (2.30) 代入 (2.25) 可得

$$\begin{aligned}&\bar{z}_0(0)+\mu\bar{z}_1(0)+\cdots+\Pi_0 z(0)+\mu\Pi_1 z(0)+\cdots=z^0,\\ &\bar{y}_0(0)+\mu\bar{y}_1(0)+\cdots+\Pi_0 y(0)+\mu\Pi_1 y(0)+\cdots=y^0.\end{aligned} \tag{2.41}$$

在等式 (2.41) 两边比较 μ 的同次幂系数可得

$$\bar{z}_0(0)+\Pi_0 z(0)=z^0,\quad \bar{y}_0(0)+\Pi_0 y(0)=y^0, \tag{2.42}$$

$$\bar{z}_k(0)+\Pi_k z(0)=0,\quad \bar{y}_k(0)+\Pi_k y(0)=0. \tag{2.43}$$

考虑到 $\Pi_k x(\tau_0)$ 是边界层函数, 所以要求 $\Pi_k x(\infty)=0\,(k\geqslant 0)$, 即

$$\Pi_k y(\infty)=0,\quad \Pi_k z(\infty)=0. \tag{2.44}$$

这样从 (2.38) 的第二个方程和 (2.44) 就有 $\Pi_0 y(\tau_0)\equiv 0$. 再从 (2.42) 求出 $\bar{y}_0(0)=y^0$. 可以看出确定 $\bar{y}_0(t)$, $\bar{z}_0(t)$ 的问题 (2.37) 和初值 $\bar{y}_0(0)=y^0$ 与退化问题完全一样, 所以 $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ 就是退化解 $\bar{y}_0=\bar{y}(t)$, $\bar{z}_0=\bar{z}(t)$.

通过 $\bar{z}_0(t)$ 可求出 $\Pi_0 z(\tau_0)$ 的初值

$$\Pi_0 z(0) = z^0 - \bar{z}_0(0) = z^0 - \varphi(y^0, 0). \tag{2.45}$$

做变量替换 $\tilde{z} = \Pi_0 z(\tau_0) + \bar{z}_0(0)$, 考虑到 $\Pi_0 y(\tau_0) \equiv 0$, 可得

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau_0} = F(\tilde{z}, y^0, 0), \quad \tilde{z}(0) = z^0. \tag{2.46}$$

初值问题 (2.46) 与辅助问题完全一样, 所以 $\Pi_0 z(\tau_0)$ 存在, 且 $\lim\limits_{\tau_0 \to \infty} \Pi_0 z(\tau_0) = 0$. 由 $[\mathrm{H}_{2.7}]$ 可以证明 $\Pi_0 z$ 的指数估计

$$\|\Pi_0 z(\tau_0)\| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0}, \quad \tau_0 \geqslant 0, \tag{2.47}$$

这里以及往下 C 和 κ 是某个正数, 在不同地方可以是不一样的. 不等式 (2.47) 的详细证明可参看 [1], 这里只对 z 是数量情况进行证明. 条件 $[\mathrm{H}_{2.7}]$ 可化为下面不等式

$$F_z(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t) < 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.48}$$

用中值公式把 (2.38) 第一个方程写成

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_0 z}{\mathrm{d}\tau_0} = F_z(\bar{z}_0(0) + \theta\Pi_0 z(\tau_0), y^0, 0)\Pi_0 z, \quad 0 < \theta < 1.$$

考虑到初值 (2.45), 可表示出 $\Pi_0 z$:

$$\Pi_0 z = (z^0 - \bar{z}_0(0))\mathrm{e}^{\int_0^{\tau_0} F_z(\bar{z}_0(0)+\theta\Pi_0 z(s), y^0, 0)\mathrm{d}s}. \tag{2.49}$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \to \infty} F_z(\bar{z}_0(0) + \theta\Pi_0 z(\tau), y^0, 0) &= \lim_{\Pi_0 z(\tau) \to 0} F_z(\bar{z}_0(0) + \theta\Pi_0 z(\tau), y^0, 0) \\ &= F_z(\bar{z}_0(0), y^0, 0) < 0,\end{aligned}$$

所以存在 $\kappa > 0$, $\bar{\tau}_0 > 0$, 当 $\tau_0 > \bar{\tau}_0$ 时

$$F_z(\bar{z}_0(0) + \theta\Pi_0 z(\tau_0), y^0, 0) < -\kappa, \tag{2.50}$$

把 (2.50) 代入 (2.49) 并考虑到 $\displaystyle\int_0^{\tau_0} = \int_0^{\bar{\tau}_0} + \int_{\bar{\tau}_0}^{\tau}$ 可得估计式

$$|\Pi_0 z| \leqslant |z^0 - \bar{z}_0(0)|\mathrm{e}^{\int_0^{\bar{\tau}_0} F_z \mathrm{d}s}\mathrm{e}^{\int_{\bar{\tau}_0}^{\tau} -\kappa \mathrm{d}s} = |z^0 - \bar{z}_0(0)|\mathrm{e}^{\int_0^{\bar{\tau}_0} F_z \mathrm{d}s}\mathrm{e}^{-\kappa_0(\tau_0 - \bar{\tau}_0)}.$$

记有界量 $C = |z^0 - \bar{z}_0(0)|\mathrm{e}^{\int_0^{\bar{\tau}_0} F_z \mathrm{d}s}\mathrm{e}^{\kappa_0\bar{\tau}_0}$, 就能得到估计式 (2.47).

用归纳法可以证明渐近展开式中的以后各项 $\bar{x}_k(t)$, $\Pi_k x(\tau_0)$ $(k \geqslant 1)$ 都能惟一确定. 不妨认为我们已经求出了前 $k-1$ 项. 所以在求第 k 项的方程式中 $F_k(t)$, $f_k(t)$, $G_k(\tau_0)$, $\Pi_{k-1} f$ 都是已知函数.

从 (2.40), (2.44) 可得

$$\Pi_k y(\tau_0) = \int_\infty^\tau \Pi_{k-1} f(s) \mathrm{d}s. \tag{2.51}$$

因为 $\|\Pi_{k-1}f(\tau)\| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0}$, 所以

$$\Pi_k y(\tau_0) \leqslant \int_{\tau_0}^\infty C\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0}\mathrm{d}s = \frac{C}{\kappa}\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0}.$$

从 (2.51) 可得 $\Pi_k y(\tau_0)$ 的初值

$$\Pi_k y(0) = \int_\infty^0 \Pi_{k-1} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

通过 (2.43) 可得 $\bar{y}_k(t)$ 的初值

$$\bar{y}_k(0) = -\Pi_k y(0) = \int_0^\infty \Pi_{k-1} f(s)\mathrm{d}s. \tag{2.52}$$

根据条件 [$\mathrm{H}_{2.7}$] 有 $\det \bar{F}_z(t) \neq 0$, 可以从 (2.39) 的第一组方程中解出 $\bar{z}_k(t)$:

$$\bar{z}_k(t) = \bar{F}_k^{-1}(t)\left[\frac{\mathrm{d}\bar{z}_{k-1}}{\mathrm{d}t} - \bar{F}_y(t)\bar{y}_k - F_k(t)\right]. \tag{2.53}$$

把 (2.53) 代入 (2.39) 的第二组方程可得确定 $\bar{y}_k(t)$ 的线性微分方程. 它与 (2.52) 一起构成的初值问题的解是惟一确定的. 求出 $\bar{y}_k(t)$ 后再代入 (2.53) 就能求出 $\bar{z}_k(t)$.

得到了 $\bar{z}_k(t)$ 的初值 $\bar{z}_k(0)$ 就能确定 $\Pi_k z(\tau_0)$ 的初值 $\Pi_k z(0) = -\bar{z}_k(0)$. 再看 (2.40) 的第一组方程, 记 $\tilde{G}_k(\tau_0) = F_y(\tau_0)\Pi_k y(\tau_0) + G_k(\tau_0)$. 易见

$$\|\tilde{G}_k(\tau_0)\| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0}. \tag{2.54}$$

求解 $\Pi_k z(\tau_0)$ 的初值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_k z}{\mathrm{d}\tau_0} = F_z(\tau_0)\Pi_k z + \tilde{G}_k(\tau_0), \\ \Pi_k z(0) = -\bar{z}_k(0). \end{cases} \tag{2.55}$$

问题 (2.55) 的解可表示成

$$\Pi_k z = -\Phi(\tau_0)\bar{z}_k(0) + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau_0)\Phi^{-1}(s)\tilde{G}_k(s)\mathrm{d}s, \tag{2.56}$$

这里 $\Phi(\tau_0)$ 是 (2.55) 所对应的齐次问题

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\tau} = F_z(\tau_0)\Phi, \quad \Phi(0) = \mathrm{E}_M$$

的基本解矩阵, 它有下面估计式 [1]

$$\begin{aligned} &\|\Phi(\tau_0)\| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0}, \quad \tau_0 \geqslant 0, \\ &\|\Phi(\tau_0)\Phi^{-1}(s)\| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa(\tau_0-s)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau_0. \end{aligned} \tag{2.57}$$

其中 E_M 是单位矩阵.

而对表达式 (2.56) 利用不等式 (2.54) 和 (2.57) 可得

$$\|\Pi_k z\| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0} + \int_0^{\tau_0} C\mathrm{e}^{-\kappa(\tau_0-s)}C\mathrm{e}^{-\kappa s}\mathrm{d}\tau_0 \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0} + C^2\tau_0\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0}. \tag{2.58}$$

选取这样的 κ_1, 使得 $0<\kappa_1<\kappa$. 此外, 我们有估计

$$\tau_0\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0} = \tau_0\mathrm{e}^{-(\kappa-\kappa_1)\tau_0}\mathrm{e}^{-\kappa_1\tau_0} \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa_1\tau_0}, \tag{2.59}$$

其中 $\tau_0\mathrm{e}^{-(\kappa-\kappa_1)\tau_0} \leqslant C$. 把 (2.59) 代入 (2.58), κ_1 仍用 κ 记之, $\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0}$ 前面的系数仍记为 C, 这就得到

$$\|\Pi_k z(\tau_0)\| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0}, \quad \tau_0 \geqslant 0.$$

于是, 我们就完成了渐近解 (2.30) 的构造并证明了每个边界层函数都有指数式衰减估计

$$\|\Pi_k x(\tau_0)\| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0}, \quad \tau_0 \geqslant 0. \tag{2.60}$$

在通常处理实际问题时, 我们总是求有限项和的渐近表达式. 因此, 进行余项估计是必不可少的.

2.2.2 渐近解的余项估计

我们记 $X_n(t,\mu)$ 为渐近级数 (2.30) 的前 $n+1$ 项部分和:

$$X_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n}\mu^k(\bar{x}_k(t) + \Pi_k x(\tau_0)). \tag{2.61}$$

定理 2.4 (Vasil'eva 定理) 如果满足条件 $[\mathrm{H}_{2.3}]$—$[\mathrm{H}_{2.6}]$, 那么当 $\mu\to 0$ 时在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上 (2.30) 是问题 (2.23)—(2.25) 的渐近级数, 即

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| = O(\mu^{n+1}). \tag{2.62}$$

证明 记

$$u(t,\mu) = z(t,\mu) - Z_n(t,\mu), \tag{2.63}$$

$$v(t,\mu) = y(t,\mu) - Y_n(t,\mu) \tag{2.64}$$

为渐近解的余项, 它们满足下面方程和初值

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = F_z u + F_y v + g_1(u,v,t,\mu), & (2.65)\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f_z u + f_y v + g_2(u,v,t,\mu), & (2.66)\\ u(0,\mu) = 0, \quad v(0,\mu) = 0. & (2.67) \end{cases}$$

其中矩阵 F_z, F_y, f_z, f_y 都在点 $(\bar{z}_0(t)+\Pi_0 z, \bar{y}_0(t), t)$ 处计算, 而

$$g_1(u,v,t,\mu)=F(Z_n+u,Y_n+v,t)-\mu\frac{\mathrm{d}Z_n}{\mathrm{d}t}-F_z u-F_y v,$$
$$g_2(u,v,t,\mu)=f(Z_n+u,Y_n+v,t)-\frac{\mathrm{d}Y_n}{\mathrm{d}t}-f_z u-f_y v.$$

这里函数 g_1, g_2 具有下面两条性质:

1) $$g_1(0,0,t,\mu)=O(\mu^{n+1}),\quad g_2(0,0,t,\mu)=O(\mu^{n+1}+\mu^n \mathrm{e}^{-\frac{\kappa t}{\mu}}).$$

2) 如果 $\|u_i(t,\mu)\|\leqslant C_1\mu$, $\|v_i(t,\mu)\|\leqslant C_1\mu$ $(i=1,2)$, 则存在实数 $C_2>0$, $\mu_0>0$, 使得当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时, 有下面不等式成立

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|g_i(u_2,v_2,t,\mu)-g_i(u_1,v_1,t,\mu)\|\leqslant C_2\mu(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_2-u_1\|+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_2-v_1\|).$$

把初值问题 (2.65)—(2.67) 写成等价的积分方程组

$$u(t,\mu)=\int_0^t U(t,s,\mu)\frac{1}{\mu}[F_y v(s,\mu)+g_1(u,v,s,\mu)]\,\mathrm{d}s, \tag{2.68}$$

$$v(t,\mu)=\int_0^t V(t,s,\mu)[f_y u(s,\mu)+g_2(u,v,s,\mu)]\,\mathrm{d}s, \tag{2.69}$$

其中 $U(t,s,\mu)$, $V(t,s,\mu)$ 是齐次方程组

$$\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=F_z u,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=f_y v$$

的基本解矩阵, 且有下面估计式 [1]:

$$\|U(t,s,\mu)\|\leqslant C\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{\mu}(t-s)},\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T.$$

把 (2.69) 关于 v 的表达式代入 (2.68), 得到

$$u(t,\mu)=\int_0^t K(t,s,\mu)u(s,\mu)\mathrm{d}s+Q_1(u,v,t,\mu), \tag{2.70}$$

这里 $K(t,s,\mu)$ 是有界核, Q_1 仍具有性质 1), 2). 把方程组 (2.70) 换成等价的方程组

$$u(t,\mu)=Q_1(u,v,t,\mu)+\int_0^t R(t,s,\mu)Q_1(u,v,t,\mu)\mathrm{d}s\equiv G_1(u,v,t,\mu), \tag{2.71}$$

其中 $R(t,s,\mu)$ 是 $K(t,s,\mu)$ 的预解式. 再把 (2.71) 代入 (2.69), 可得

$$v(t,\mu)=\int_0^t V(t,s,\mu)[f_2 G_1(u,v,s,\mu)+g_2(u,v,s,\mu)]\,\mathrm{d}s\equiv G_2(u,v,t,\mu), \tag{2.72}$$

所得到的积分算子 G_1, G_2 仍保留性质 1), 2). 对积分方程组采用逐次逼近法可以证明 u, v 存在且惟一, 并有估计式

$$\max_{\leqslant t\leqslant T}\|u(t,\mu)\| = O(\mu^{n+1}), \quad \max_{\leqslant t\leqslant T}\|v(t,\mu)\| = O(\mu^{n+1}). \tag{2.73}$$

余项 u, v 的存在惟一说明了解 $z(t,\mu)$, $y(t,\mu)$ 的存在惟一, 而估计式 (2.73) 就是余项估计式 (2.62). □

注释 2.1 如果构造的渐近近似是 n 阶的, 则只要求 F, f 在曲线 $L_0 = L_1 \bigcup L_2$ 的 δ 管子里有 $n+2$ 阶连续导数就行了. 这里

$$L_1 = \{(z,y,t)|z = \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau),\ \tau \geqslant 0,\ y = y_0,\ t = 0\},$$
$$L_2 = \{(z,y,t)|z = \bar{z}_0(t),\ y = \bar{y}_0(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

第三章　两点边值问题

3.1　半线性两点边值问题

讨论下面二阶方程的边值问题

$$\begin{cases} \mu^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F(y,t), \quad 0 < t < 1, & (3.1) \\ y(0,\mu) = y^0, \quad y(1,\mu) = y^1, & (3.2) \end{cases}$$

其中 $\mu > 0$ 是小参数, $y \in \Re$. 我们将证明 (3.1), (3.2) 解的存在性并构造其解的渐近展开式.

$[\mathrm{H}_{3.1}]$　假设在 $D = \{(y,t) | l_1 < y < l_2,\ 0 < t < 1\}$ 上 $F(y,t)$ 无限次可微, 并且 $y^0, y^1 \in (l_1, l_2)$, 而 l_1, l_2 是两个给定的实数.

$[\mathrm{H}_{3.2}]$　假设在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上退化方程 $F(y,t) = 0$ 仅有解 $y = \varphi(t)$, 且满足不等式

$$F_y(\varphi(t), t) > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{3.3}$$

在 $[\mathrm{H}_{3.1}]$ 中关于 F 无限次可微的条件只是在构造渐近解时需要. 如果只需要构造 n 阶渐近展开式, 则要求 F 有 $n+1$ 阶导数就够了. 因为退化方程 $F(y,t) = 0$ 是代数型的, 它的解一般不能满足边值条件 (3.2), 所以在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 处都会产生边界层.

3.1.1　渐近解的构造

我们用边界层函数法构造渐近解, 为此把下面级数代入 (3.1):

$$y = \bar{y}(t,\mu) + \Pi y(\tau_0, \mu) + R y(\tau_1, \mu), \tag{3.4}$$

这里

$$\bar{y}(t,\mu)=\bar{y}_0(t)+\mu\bar{y}_1(t)+\cdots \tag{3.5}$$

为正则级数;

$$\Pi y(\tau_0,\mu)=\Pi_0 y(\tau_0)+\mu\Pi_1 y(\tau_0)+\cdots,\quad \tau_0=\frac{t}{\mu} \tag{3.6}$$

是 $t=0$ 附近边界层级数;

$$Ry(\tau_1,\mu)=R_0 y(\tau_1)+\mu R_1 y(\tau_1)+\cdots,\quad \tau_1=\frac{t-1}{\mu} \tag{3.7}$$

是 $t=1$ 附近边界层级数.

正则级数 (3.5) 的每一项和以前一样由下面方程确定

$$\begin{aligned}
&0=F(\bar{y}_0(t),t),\\
&\frac{\mathrm{d}^2\bar{y}_0}{\mathrm{d}t^2}=F_y(\bar{y}_0(t),t)\bar{y}_2(t),\\
&\frac{\mathrm{d}^2\bar{y}_2}{\mathrm{d}t^2}=F_y(\bar{y}_0(t),t)\bar{y}_4(t)+g_4,\\
&\cdots\\
&\frac{\mathrm{d}^2\bar{y}_{2k-2}}{\mathrm{d}t^2}=F_y(\bar{y}_0(t),t)\bar{y}_{2k}(t)+g_{2k},\\
&\cdots
\end{aligned}$$

这里 g_{2k} 是 $\bar{y}_j$ $(0\leqslant j\leqslant 2k-2)$ 和 t 的已知函数.

因为所有方程都是代数型的, 由稳定性条件 (3.3) 所有的正则项 $\bar{y}_k(t)$ 可逐次确定. 特别有 $\bar{y}_0=\varphi(t)$.

注释 3.1 这里正则级数 (3.5) 的所有奇数次项的系数为零. 经常会碰到这样情况, 所给的方程除了在高阶导数前有小参数 μ 外, 方程右边也含有小参数 μ, 这时正则项展开式既含有 μ 的偶次项, 也含有 μ 的奇次项.

边界函数 $\Pi_i y(\tau_0,\mu)\,(i\geqslant 0)$ 由下面方程确定

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\Pi_0 y}{\mathrm{d}\tau_0^2}=F(\varphi(0)+\Pi_0 y,0)-F(\varphi(0),0)=F(\varphi+\Pi_0 y,0),\\
&\frac{\mathrm{d}^2\Pi_1 y}{\mathrm{d}\tau_0^2}=\tilde{F}_y\Pi_1 y+h_1,\\
&\cdots\\
&\frac{\mathrm{d}^2\Pi_k y}{\mathrm{d}\tau_0^2}=\tilde{F}_y\Pi_k y+h_k,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

其中

$$h_1 = \tilde{F}_y[\bar{y}_0'(0)\tau_0 + \bar{y}_1(0)] + \tilde{F}_t\tau_0 - \bar{F}_y[\bar{y}_0'(0)\tau_0 + \bar{y}_1(0)] - \bar{F}_t\tau_0.$$

这里 "~" 表示在 $(\varphi(0)+\Pi_0 y(\tau_0),0)$ 点取值, 而 "-" 则在 $(\varphi(0),0)$ 点取值, h_k 是 $\Pi_0 y,\cdots,\Pi_{k-1}y,\tau_0$ 的已知函数. 考虑到右边界层函数 $Ry(\tau_1,\mu)$ 对左边值的影响是指数小的, 所以把 (3.4) 代入 (3.2) 可得在 $t=0$ 的边值条件

$$\Pi_0 y(0) = y^0 - \varphi(0), \cdots, \Pi_k y(0) = -\bar{y}_k(0). \tag{3.8}$$

(3.8) 可作为 $\Pi_k y(\tau_0)$ 在 $\tau_0 = 0$ 的一个条件, 但还需要找另一个条件.

写出确定 $\Pi_0 y(\tau_0)$ 的方程和边值

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Pi_0 y}{\mathrm{d}\tau_0^2} = F(\varphi(0)+\Pi_0 y, 0), \\ \Pi_0 y(0) = y^0 - \varphi(0). \end{cases} \tag{3.9}$$

记 $\tilde{y} = \varphi(0) + \Pi_0 y$, 则 (3.9) 可写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau_0^2} = F(\tilde{y}, 0), \\ \tilde{y}(0) = y^0. \end{cases} \tag{3.10}$$

为了方便讨论, 把 (3.10) 写成方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau_0} = \tilde{z}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau_0} = F(\tilde{y}, 0). \end{cases} \tag{3.11}$$

自治系统 (3.11) 有鞍点 $M(\varphi(0),0)$. 这是因为特征方程

$$\lambda^2 - F_y(\varphi(0),0) = 0$$

有特征值 $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{F_y(\varphi(0),0)}$. 特征值 $\lambda_1 > 0$ 对应于当 $\tau_0 \to -\infty$ 时进入鞍点 M 的轨线 L_1, 而特征值 $\lambda_2 < 0$ 对应于当 $\tau_0 \to +\infty$ 时进入鞍点 M 的轨线 L_2. 在平衡点 M 有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tilde{y}}\right|_M = \lambda_2 < 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tilde{y}}\right|_M = \lambda_1 > 0.$$

这里相轨线可以解析表达出来. 通过分离变量从 (3.11) 可得过鞍点 M 的首次积分

$$\tilde{z}^2 = 2\int_{\varphi(0)}^{\tilde{y}} F(y,0)\,\mathrm{d}y.$$

对应的轨道 L_1, L_2 分别为

$$\tilde{z}_1 = -\sqrt{2\int_{\varphi(0)}^{\tilde{y}} F(y,0)\,\mathrm{d}y},$$
$$\tilde{z}_2 = \sqrt{2\int_{\varphi(0)}^{\tilde{y}} F(y,0)\,\mathrm{d}y}.$$

为了满足条件 $\Pi_0 y(\infty) = 0$, 必须要求初始点 $(y^0, \tilde{z}(0))$ 落在 L_2 上, 即

[$H_{3.3}$] 假设在 (3.11) 的相平面 $(\tilde{y}, \tilde{z})$ 上垂线 $\tilde{y} = y^0$ 与当 $\tau_0 \to \infty$ 时进入鞍点 M 的轨线相交.

这样求 $\Pi_0 y$ 的问题可归结如下:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau_0^2} = F(\tilde{y}, 0), & (3.12) \\ \tilde{y}(0) = y^0, \qquad \tilde{y}(\infty) = \varphi(0). & (3.13) \end{cases}$$

条件 [$H_{3.3}$] 保证了 (3.12), (3.13) 解的存在性. 对右边界层函数 $R_0 y(\tau_1)$ 可进行同样讨论. 在做了变换 $\hat{y} = \varphi(1) + R_0 y(\tau_1)$ 之后可得下面方程和边值

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\hat{y}}{\mathrm{d}\tau_1^2} = F(\hat{y}, 1), & (3.14) \\ \hat{y}(0) = y^1, \qquad \hat{y}(-\infty) = \varphi(1). & (3.15) \end{cases}$$

[$H_{3.4}$] 假设在 (3.14) 的相平面 $(\hat{y}, \hat{z})$ 上垂线 $\tilde{y} = y^1$ 与当 $\tau_1 \to -\infty$ 时进入鞍点 M 的轨线相交.

所以 $R_0 y(\tau_1)$ 也存在. 这样展开式 (3.4) 的主项 $\varphi(t) + \Pi_0 y(\tau_0) + R_0 y(\tau_1)$ 就完全确定了.

注释 3.2 如果 (3.9) 是线性方程组, 则进入鞍点的分界轨线是直线, 那么垂线 $\tilde{y} = y^0$ 总能与 L_2 相交. 但在非线性情况时却未必如此.

下面很重要的是要证明当 $\tau_0 \to \infty\,(\tau_1 \to -\infty)$ 时 $\Pi_0 y(\tau_0)\,(R_0 y(\tau_1))$ 是指数衰减函数.

引理 3.1 边界函数 $\Pi_0 y(\tau_0)\,(0 \leqslant \tau_0 < \infty)$ 有下面指数估计式:

$$\overline{C}_0 \mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0 \tau_0} \leqslant \Pi_0 y(\tau_0) \leqslant \underline{C}_0 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau_0}, \tag{3.16}$$
$$\overline{C}_1 \mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0 \tau_0} \leqslant \frac{\mathrm{d}\Pi_0 y(\tau_0)}{\mathrm{d}\tau_0} \leqslant \underline{C}_1 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau_0}. \tag{3.17}$$

证明 在 $\tilde{y} = \varphi(0)$ 邻域 $\tilde{z}$ 可表示成

$$\begin{aligned} \tilde{z}(\tilde{y}) &= \tilde{z}(\varphi(0)) + \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tilde{y}}(\varphi(0))(\tilde{y} - \varphi(0)) + o(\tilde{y} - \varphi(0)) \\ &= \lambda_2(\tilde{y} - \varphi(0)) + o(\tilde{y} - \varphi(0)). \end{aligned}$$

我们先讨论当 $\tilde{y}<\varphi(0)$ 的情况. 因为 $\lambda_2\leqslant 0$, 考虑到 $\lim\limits_{\tau_0\to+\infty}(\tilde{y}-\varphi(0))=0$, 所以存在 $\tau_0^*>0$ 和 $0<\underline{\kappa}_0<\overline{\kappa}_0$, 使得当 $\tau_0>\tau_0^*$ 时, 有

$$-\underline{\kappa}_0(\tilde{y}-\varphi(0))\leqslant\tilde{z}\leqslant-\overline{\kappa}_0(\tilde{y}-\varphi(0)).\tag{3.18}$$

不妨设

$$-\overline{\kappa}_0=\lambda_2-\delta,\quad -\underline{\kappa}_0=\lambda_2+\delta,$$

其中 δ 是某个正数, 从 (3.18) 可得

$$-\underline{\kappa}_0\Pi_0y(\tau_0)\leqslant\frac{\mathrm{d}\Pi_0y(\tau_0)}{\mathrm{d}\tau_0}\leqslant-\overline{\kappa}_0\Pi_0y(\tau_0).\tag{3.19}$$

对 (3.19) 进行积分

$$\Pi_0y(\tau_0^*)\mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0(\tau_0-\tau_0^*)}\leqslant\Pi_0y(\tau_0)\leqslant\Pi_0y(\tau_0^*)\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0(\tau_0-\tau_0^*)}.$$

因为

$$\Pi_0y(\tau_0^*)\mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0(\tau_0-\tau_0^*)}=\Pi_0y(\tau_0^*)\mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0\tau_0}\mathrm{e}^{\overline{\kappa}_0\tau_0^*}\equiv\overline{C}_0\mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0\tau_0},$$

$$\Pi_0y(\tau_0^*)\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0(\tau_0-\tau_0^*)}=\Pi_0y(\tau_0^*)\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0\tau_0}\mathrm{e}^{\underline{\kappa}_0\tau_0^*}\equiv\underline{C}_0\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0\tau_0},$$

所以

$$\overline{C}_0\mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0\tau_0}\leqslant\Pi_0y(\tau_0)\leqslant\underline{C}_0\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0\tau_0},$$

这里 $\overline{C}_0,\underline{C}_0$ 是仅依赖于 τ_0^* 而与 μ 无关的正数. 再从 (3.17) 就得到了对 $\tilde{z}=\dfrac{\mathrm{d}\Pi_0y}{\mathrm{d}\tau_0}$ 的估计, 即

$$-\overline{\kappa}_0\overline{C}_0\mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0\tau_0}\leqslant\tilde{z}\leqslant-\underline{\kappa}_0\underline{C}_0\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0\tau_0},$$

或者

$$\overline{C}_1\mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0\tau_0}\leqslant\tilde{z}\leqslant\underline{C}_1\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0\tau_0},\tag{3.20}$$

当 $\tilde{y}>\varphi(0)$ 的情况可做同样讨论. □

对函数 $R_0y(\tau_1)$ 也有同样结论:

引理 3.2 边界函数 $R_0y(\tau_1)(-\infty<\tau_1\leqslant 0)$ 满足下面不等式:

$$\overline{C}_0\mathrm{e}^{\overline{\kappa}_0\tau_1}\leqslant R_0y(\tau_1)\leqslant\underline{C}_0\mathrm{e}^{\underline{\kappa}_0\tau_1},\tag{3.21}$$

$$\overline{C}_1\mathrm{e}^{\overline{\kappa}_0\tau_1}\leqslant\frac{\mathrm{d}R_0y(\tau_1)}{\mathrm{d}\tau_1}\leqslant\underline{C}_1\mathrm{e}^{\underline{\kappa}_0\tau_1}.\tag{3.22}$$

注释 3.3 在引理 3.1 和引理 3.2 中 $\overline{\kappa}_0,\underline{\kappa}_0,\overline{C}_i,\underline{C}_i\ (i=0,1)$ 一般来说是不同的.

下面求 $\Pi_1 y$, 它满足下面的方程和边值

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Pi_1 y}{\mathrm{d}\tau_0^2} = \tilde{F}_y \Pi_1 y + h_1, & (3.23) \\ \Pi_1 y(0) = -\bar{y}_1(0), \quad \Pi_1 y(\infty) = 0, & (3.24) \end{cases}$$

这里

$$h_1 = \Delta F_y \bar{y}_0'(0)\tau_0 + \Delta F_t \tau_0, \tag{3.25}$$

而 $\Delta F_y = \tilde{F}_y - \bar{y}_y, \Delta F_t = \tilde{F}_t - \bar{F}_t$.

因为 (3.23), (3.24) 是线性边值问题, 它的解有下面表达式, 这可直接检验.

$$\Pi_1 y(\tau_0) = \tilde{z}(\tau_0) \int_0^{\tau_0} \tilde{z}^{-2}(\eta)\mathrm{d}\eta \int_\infty^\eta \tilde{z}(\sigma) h_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \tag{3.26}$$

其中 $\tilde{z} = \dfrac{\mathrm{d}\Pi_0 y}{\mathrm{d}\tau_0}$.

由引理 3.1, 不难得到对 h_1 的估计

$$|h_1| < C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau_0}, \quad \underline{\kappa}_1 < \underline{\kappa}_0.$$

这样, 从 (3.26) 可对 $\Pi_1 y$ 作估计

$$|\Pi_1 y| < C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau_0} \int_0^{\tau_0} \mathrm{e}^{2\overline{\kappa}_0 \eta}\,\mathrm{d}\eta \int_\infty^\eta \mathrm{e}^{-(\underline{\kappa}_0 + \underline{\kappa}_1)\sigma}\,\mathrm{d}\sigma,$$

考虑到 $\overline{\kappa}_0 = \underline{\kappa}_0 + 2\delta$, 有

$$|\Pi_1 y| < C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau_0} \int_0^{\tau_0} \mathrm{e}^{(\underline{\kappa}_0 - \underline{\kappa}_1 + 4\delta)\eta}\,\mathrm{d}\eta = C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau_0}.$$

对 $R_1 y(\tau_1)$ 也有类似估计. 把上面的结果归结成下面引理.

引理 3.3 边界层函数的一次项 $\Pi_1 y(\tau_0)$, $R_1 y(\tau_1)$ 也有指数估计式:

$$|\Pi_1 y(\tau_0)| < C_0 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau_0}, \quad |R_1 y(\tau_1)| < C_1 \mathrm{e}^{\underline{\kappa}_1 \tau_1}, \tag{3.27}$$

其中 $C_i (i = 0, 1)$ 是任意常数.

3.1.2 解的存在性及余项估计

表达式

$$\bar{Y}_0(t, \mu) = \varphi(t) + \Pi_0 y(\tau_0) + R_0 y(\tau_1) \tag{3.28}$$

是级数 (3.4) 的零阶部分和.

我们将用微分不等式方法来证明问题 (3.1), (3.2) 解的存在性, 并进行余项估计. 为此先介绍一下 Nagumo 定理

定理 3.1 (Nagumo 定理)　假设存在下面问题的上下解 $\beta(t)$, $\alpha(t)$

$$\begin{cases} Ly \equiv y'' - F(y,t) = 0, \quad 0 < t < 1, & (3.29) \\ y(0) = y^0, \quad y(1) = y^1, & (3.30) \end{cases}$$

且具有性质:

1) $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$;

2) $L\beta \leqslant 0, \quad L\alpha \geqslant 0$;

3) $\alpha(0) \leqslant y^0 \leqslant \beta(0), \quad \alpha(1) \leqslant y^1 \leqslant \beta(1)$,

那么问题 (3.29), (3.30) 的解 $y(t)$ 存在, 且满足不等式

$$\alpha(t) \leqslant y(t) \leqslant \beta(t).$$

定理 3.2　假设满足条件 $[H_{3.1}]$—$[H_{3.4}]$, 那么可以找到充分小的 $\mu_0 > 0$, 当 $\mu < \mu_0$ 时, 问题 (3.1), (3.2) 的解 $y(t,\mu)$ 存在, 且有表达式

$$y(t,\mu) = \bar{Y}_0(t,\mu) + r_1(t,\mu), \quad |r_1(t,\mu)| \leqslant C\mu, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{3.31}$$

其中 C 不依赖于 μ.

证明　我们取上下解 $\beta(t,\mu)$, $\alpha(t,\mu)$ 如下面形式:

$$\beta(t,\mu) = \varphi(t) + \Pi_0 y(\tau_0) + R_0 y(\tau_1) + \mu(\Pi_{1\beta} y(\tau_0) + R_{1\beta} y(\tau_1) + 1), \tag{3.32}$$

$$\alpha(t,\mu) = \varphi(t) + \Pi_0 y(\tau_0) + R_0 y(\tau_1) - \mu(\Pi_{1\alpha} y(\tau_0) + R_{1\alpha} y(\tau_1) + 1), \tag{3.33}$$

其中 $\Pi_{1\beta} y$ 和 $R_{1\beta} y$ 是 $\Pi_1 y$, $R_1 y$ 的变形. 例如, 函数 $\Pi_{1\beta} y$ 取下面问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 \Pi_{1\beta} y}{\mathrm{d}\tau_0^2} = \tilde{F}_y \Pi_{1\beta} y + h_1 + \omega \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau_0}, \\ \Pi_{1\beta} y(0) = 0, \quad \Pi_{1\beta} y(\infty) = 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

这里 h_1 和表达式 (3.25) 一样, 而正常数因子 ω 待定. 边界层函数 $\Pi_{1\alpha} y$ 满足与 (3.34) 类似的方程, 只要在把 $+\omega$ 换成 $-\omega$ 即可.

引理 3.4　问题 (3.34) 的解 $\Pi_{1\beta} y$ 满足下面不等式:

$$\Pi_{1\beta} y > 0, \quad |\Pi_{1\beta} y| < C(\omega) \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau_0}. \tag{3.35}$$

该引理的证明可用公式 (3.26)

$$\Pi_{1\beta} y = \tilde{z}(\tau_0) \int_0^{\tau_0} \tilde{z}^{-2}(\eta) \mathrm{d}\eta \int_\infty^{\tau_0} \tilde{z}(\sigma)(h_1(\sigma) + \omega \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \sigma}) \mathrm{d}\sigma, \tag{3.36}$$

通过适当选取 ω 使不等式 (3.35) 成立.

下面将检验 Nagumo 条件. 我们把区间 $[0,1]$ 一分为二. 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上不考虑 R_0y, $R_{1\beta}y$, 而在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上不考虑 Π_0y, $\Pi_{1\beta}y$, 因为它们都是指数小的.

首先验证 Nagumo 条件中的 1), 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上

$$\beta-\alpha=2\mu+\mu(\Pi_{1\beta}y-\Pi_{1\alpha}y)>0.$$

同样在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上该不等式也成立, 所以在整个区间 $[0,1]$ 上有 $\beta(t,\mu)\geqslant\alpha(t,\mu)$.

其次检查 Nagumo 条件中的 3)

$$\beta(0,\mu)=\varphi(0)+\mu+\Pi_0y(0)+\mu\Pi_{1\beta}y(0)+EST>y^0,$$

$$\beta(1,\mu)=\varphi(1)+\mu+R_0y(0)+\mu R_{1\beta}y(0)+EST>y^1.$$

这里 EST 表示指数小量.

最后验证 Nagumo 条件中的 2). 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上

$$\begin{aligned}L\beta&=\mu^2\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2}-F(\beta,t)\\&=\mu^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\varphi(t)+\mu)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau_0^2}\Pi_0y+\mu\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau_0^2}\Pi_{1\beta}y\\&\quad-F(\varphi(t)+\mu+\Pi_0y+\mu\Pi_{1\beta}y,t)+EST,\end{aligned}$$

我们把 F 表示成下面形式 $F=\bar{F}+\Pi F$, 其中

$$\begin{aligned}&\bar{F}=F(\varphi(t)+\mu,t)=\mu F_y(\varphi(t),t)+\frac{1}{2}\mu^2F_{yy}^*(\varphi(t)+\theta_1\mu,t),\quad 0<\theta_1<1;\\&\Pi F=F(\varphi(\tau_0\mu)+\mu+\Pi_0y+\mu\Pi_{1\beta}y,\tau_0\mu)-F(\varphi(\tau_0\mu)+\mu,\tau_0\mu).\end{aligned}$$

对 ΠF 用泰勒公式展开到第三项, 即

$$\Pi F=\Pi F(0)+\mu\Pi F'(0)+\frac{1}{2}\mu^2\Pi F''(\theta_2\mu),\ 0<\theta_2<1.$$

显然

$$\begin{aligned}&\Pi F(0)=F(\varphi(0)+\Pi_0y,0)-F(\varphi(0),0)=\frac{\mathrm{d}^2\Pi_0y}{\mathrm{d}\tau_0^2},\\&\Pi F'(0)=\Delta F_y(\varphi'(0)\tau_0+1)+\Delta F_t\tau_0+\tilde{F}_y\Pi_{1\beta}y=\frac{\mathrm{d}^2\Pi_{1\beta}y}{\mathrm{d}\tau_0^2}-\omega\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0\tau_0}.\end{aligned}$$

现在转向对 $L\beta$ 的估计

$$\begin{aligned}L\beta&=O(\mu^2)-\mu\omega\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1\tau_0}-F_y(\varphi(t),t)\mu-\frac{1}{2}F_{yy}^*\mu^2\\&=-F_y(\varphi(t),t)\mu+O(\mu^2)-\omega\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1\tau_0}.\end{aligned}$$

可见 F_y 的符号决定了 $L\beta$ 的符号, 即 $L\beta < 0$. 同理在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上该结论也正确. 类似地可以验证下解 $\alpha(t,\mu)$ 也满足 Nagumo 条件中的 2), 3). 这样, 根据 Nagumo 定理 (3.1), (3.2) 的解 $y(t,\mu)$ 存在, 并且有下面估计:

$$\varphi(t) - \mu + \Pi_0 y + R_0 y + \mu\Pi_{1\alpha} y + \mu R_{1\alpha} y \leqslant y(t,\mu),$$
$$y(t,\mu) \leqslant \varphi(t) + \mu + \Pi_0 y + R_0 y + \mu\Pi_{1\beta} y + \mu R_{1\beta} y.$$

考虑到 $\Pi_{1\alpha} y + R_{1\alpha} y < 0, \quad \Pi_{1\beta} y + R_{1\beta} y > 0$, 所以有

$$|y(t,\mu) - (\varphi(t) + \Pi_0 y(\tau_0) + R_0 y(\tau_1))| \leqslant C\mu.$$

定理 3.2 证毕. □

可以把定理 3.2 推广到更一般情况

定理 3.3　假设满足条件 $[H_{3.1}]$—$[H_{3.4}]$, 那么存在充分小的 μ_0, 当 $0 < \mu < \mu_0$ 时, 问题 (3.1), (3.2) 的解 $y(t,\mu)$ 存在, 且有表达式:

$$y(t,\mu) = \bar{Y}_n(t,\mu) + r_{n+1}(t,\mu), \quad |r_{n+1}(t,\mu)| \leqslant C\mu^{n+1},$$

这里

$$\bar{Y}_n(t,\mu) = \sum_{i=0}^{n} \mu^i [\bar{y}_i(t) + \Pi_i y(\tau_0) + R_i y(\tau_1)],$$

而常数 C 不依赖于 μ.

定理 3.3 的证明只是在技术层面上比定理 3.2 较复杂, 但方法基本上是一样的, 也是套用 Nagumo 定理进行证明. 这时的上下解为

$$\begin{aligned}
\beta(t,\mu) = {} & \varphi(t) + \cdots + \mu^n \bar{y}_n(t) + \mu^{n+1}(\bar{y}_{n+1}(t) + 1) + \Pi_0 y(\tau_0) + \cdots + \mu^n \Pi_n y(\tau_0) \\
& + \mu^{n+1}\Pi_{n+1,\beta} y(\tau_0) + R_0 y(\tau_1) + \cdots + \mu^n R_n y(\tau_1) + \mu^{n+1} R_{n+1,\beta} y(\tau_1), \\
\alpha(t,\mu) = {} & \varphi(t) + \cdots + \mu^n \bar{y}_n(t) + \mu^{n+1}(\bar{y}_{n+1}(t) - 1) + \Pi_0 y(\tau_0) + \cdots + \mu^n \Pi_n y(\tau_0) \\
& + \mu^{n+1}\Pi_{n+1,\alpha} y(\tau_0) + R_0 y(\tau_1) + \cdots + \mu^n R_n y(\tau_1) + \mu^{n+1} R_{n+1,\alpha} y(\tau_1).
\end{aligned}$$

其中 $\Pi_{n+1,\beta} y(\tau_0), \Pi_{n+1,\alpha} y(\tau_0)$ 分别满足下面方程和边值

$$\begin{cases}
\dfrac{d^2}{d\tau_0^2}\Pi_{n+1,\beta} y = \tilde{F}_y \Pi_{n+1,\beta} y + h_{n+1,\beta} + \omega e^{-\underline{\kappa}\tau_0}, \\
\Pi_{n+1,\beta} y(0) = 0, \quad \Pi_{n+1,\beta} y(-\infty) = 0;
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{d^2}{d\tau_0^2}\Pi_{n+1,\alpha} y = \tilde{F}_y \Pi_{n+1,\alpha} y + h_{n+1,\alpha} - \omega e^{-\underline{\kappa}\tau_0}, \\
\Pi_{n+1,\alpha} y(0) = 0, \quad \Pi_{n+1,\alpha} y(\infty) = 0.
\end{cases}$$

值得注意的是只要条件 $[H_{3.2}]$ 改成方阵 $F_y(\varphi(t), t)$ 没有正实数特征值, 定理 3.3 推广到方程仍然成立.

3.2 弱非线性边值问题

讨论下面二阶方程的边值问题

$$\begin{cases}\mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F\left(\mu\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},y,t\right), \quad 0<t<1,\\ y(0,\mu)=y^0, \quad y(1,\mu)=y^1.\end{cases} \tag{3.37}$$

为讨论方便把方程 (3.37) 写成方程组形式

$$\begin{cases}\mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=F(z,y,t), \quad 0<t<1,\\ \mu\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z.\end{cases} \tag{3.38}$$

[$\mathrm{H}_{3.5}$] 假设函数 $F(z,y,t)$ 在 $\bar{G}$ 上无限次可微

$$\bar{G}=\{(z,y,t)|\ (y,t)\in\bar{D}, M\leqslant z\leqslant N\},$$

这里 y^0, $y^1\in(A,B)$, $\bar{D}=\{(y,t)|\ 0\leqslant t\leqslant 1, A\leqslant y\leqslant B\}$, 而 A,B 是某两个给定的数.

[$\mathrm{H}_{3.6}$] 假设退化方程 $F(0,y,t)=0$ 在 $\bar{D}$ 上仅有解 $y=\varphi(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 且满足不等式

$$F_y(0,\varphi(t),t)>0. \tag{3.39}$$

3.2.1 渐近解的构造

我们将构造下面形式的级数 ($\omega=(z,y)^{\mathrm{T}}$)

$$\omega=\bar{\omega}(t,\mu)+\Pi\omega(\tau_0,\mu)+R\omega(\tau_1,\mu), \tag{3.40}$$

其中在 (3.40) 中 $\bar{\omega}(t,\mu)$ 为正则项级数:

$$\bar{\omega}(t,\mu)=\bar{\omega}_0(t)+\mu\bar{\omega}_1(t)+\cdots; \tag{3.41}$$

$\Pi\omega(\tau_0,\mu)$ 是左边界层级数, $\tau_0=t/\mu\geqslant 0$:

$$\Pi\omega(\tau_0,\mu)=\Pi_0\omega(\tau_0)+\mu\Pi_1\omega(\tau_0)+\cdots; \tag{3.42}$$

$R\omega(\tau_1,\mu)$ 是右边界层级数, $\tau_1=(t-1)/\mu\leqslant 0$:

$$R\omega(\tau_1,\mu)=R_0\omega(\tau_1)+\mu R_1\omega(\tau_1)+\cdots. \tag{3.43}$$

利用边界层函数法可得确定各正则项系数的方程

$$
\begin{aligned}
&0 = F(0,\varphi,t), \quad \bar{z}_0 = 0,\\
&\bar{z}_0' = F_z(0,\varphi,t)\bar{z}_1 + F_y(0,\varphi,t)\bar{y}_1, \quad \bar{y}_0' = \bar{z}_1,\\
&\cdots\\
&\bar{z}_{n-1}' = \bar{F}_z\bar{z}_n + \bar{F}_y\bar{y}_n + g_n(t), \quad \bar{y}_{n-1}' = \bar{z}_n,\\
&\cdots
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

这里 $g_n(t)$ 是 $\bar{\omega}_0(t), \bar{\omega}_1(t), \cdots, \bar{\omega}_{n-1}(t)$ 的已知复合函数, "$-$" 表示在 $(0,\varphi,t)$ 点取值. 从 (3.44) 逐次可求得 $\{\bar{z}_n(t), \bar{y}_n(t)\}\ (n \geqslant 0)$. 显然 $\bar{z}_0(t) = 0$, $\bar{y}_0 = \varphi(t)$.

确定左边界层级数系数的方程为 (只写出零次和一次的方程)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0}\Pi_0 z = F(\Pi_0 z, \varphi(0) + \Pi_0 y, 0), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0}\Pi_0 y = \Pi_0 z, \tag{3.45}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0}\Pi_1 z = \tilde{F}_z\Pi_1 z + \tilde{F}_y\Pi_1 y + h_1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0}\Pi_1 y = \Pi_1 z, \tag{3.46}$$

其中 $h_1 = \tilde{F}_z\bar{z}_1(0) + \tilde{F}_y(\bar{y}_0'(0)\tau_0 + \bar{y}_1(0)) + \tilde{F}_t\tau_0$.

相应这些方程的边值条件为

$$\Pi_0 y(0) = y^0 - \varphi(0), \quad \Pi_1 y(0) = -\bar{y}_1(0). \tag{3.47}$$

$$\Pi_0 y(\infty) = 0, \quad \Pi_1 y(\infty) = 0. \tag{3.48}$$

在方程组 (3.45) 中做变量替换 $\tilde{y} = \varphi(0) + \Pi_0 y$, $\tilde{z} = \Pi_0 z$, 可以把 (3.45) 写成下面形式

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau_0} = F(\tilde{z}, \tilde{y}, 0), \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau_0} = \tilde{z}. \tag{3.49}$$

显然, 该方程组比 (3.12) 要复杂. 在相平面 $(\tilde{y}, \tilde{z})$ 上, $M(\varphi(0), 0)$ 仍是鞍点, 这是因为特征方程的两个特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\bar{F}_z \pm \sqrt{\bar{F}_z^2 + 4\bar{F}_y}\right), \tag{3.50}$$

其中 $\bar{F}_z$, $\bar{F}_y$ 在点 $(\varphi(0), 0)$ 取值. 正特征值 λ_1 对应于当 $\tau_0 \to -\infty$ 时进入鞍点的轨线 L_1, 负特征值 λ_2 对应于当 $\tau_0 \to +\infty$ 时进入鞍点的轨线 L_2. 这里 L_1, L_2 没有显式, 但这并不影响讨论. 为了保证 (3.49) 和边值 $\Pi_0 y(0) = y^0 - \varphi(0)$, $\Pi_0 y(\infty) = 0$ 解的存在性, 需做下面假设:

[$\mathrm{H}_{3.7}$] 假设在相平面 $(\tilde{y}, \tilde{z})$ 上垂线 $\tilde{y} = y^0$ 与当 $\tau_0 \to \infty$ 时进入鞍点 $M(\varphi(0), 0)$ 的轨线相交.

[$\mathrm{H}_{3.8}$] 假设在相平面 $(\hat{y}, \hat{z})$ 上垂线 $\hat{y} = y^1$ 与当 $\tau_1 \to -\infty$ 时进入鞍点 $M(\varphi(1), 1)$ 的轨线相交.

同时可以得到对 Π 函数的指数估计, 但比较复杂.

引理 3.5 对边界层函数 $\Pi_0 y$ 和 $\Pi_0 z$ 有下面指数估计式

$$\overline{C}_0 e^{-\overline{\kappa}_0 \tau_0} \leqslant \Pi_0 y(\tau_0) \leqslant \underline{C}_0 e^{-\underline{\kappa}_0 \tau_0}, \tag{3.51}$$

$$\overline{C}_1 e^{-\overline{\kappa}_0 \tau_0} \leqslant \Pi_0 z(\tau_0) \leqslant \underline{C}_1 e^{-\underline{\kappa}_0 \tau_0}, \quad \tau_0 \geqslant 0. \tag{3.52}$$

证明 当 $|\tilde{y} - \varphi(0)|$ 足够小或 τ_0 充分大时, 有展开式

$$\tilde{z}(\tilde{y}) = \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{y}}|_{\tilde{y}=\varphi(0)}(\tilde{y} - \varphi(0)) + o(\tilde{y} - \varphi(0))^2.$$

我们先计算 $\dfrac{d\tilde{z}}{d\tilde{y}}|_{\tilde{y}=\varphi(0)}$ 的值. 因为 $\tilde{z} \neq 0$, 所以从 (3.49) 可得

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{y}} = \frac{F(\tilde{z}, \tilde{y}, 0)}{\tilde{z}}.$$

两边取极限由洛必达法则有

$$\left(\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{y}}\right)^2\bigg|_{\tilde{y}=\varphi(0)} = \bar{F}_z \left(\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{y}}\right)\bigg|_{\tilde{y}=\varphi(0)} + \bar{F}_y,$$

解得

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{y}}\bigg|_{\tilde{y}=\varphi(0)} = \frac{1}{2}\left[\bar{F}_z \pm \sqrt{\bar{F}_z^2 + 4\bar{F}_y}\right] = \lambda_{1,2}.$$

考虑到 $\dfrac{d\tilde{z}}{d\tilde{y}}$ 非负, 所以

$$\tilde{z}(\tilde{y}) = \lambda_2(\tilde{y} - \varphi(0)) + o(\tilde{y} - \varphi(0))^2.$$

往下的推导和引理 3.1 一样. 这样就证明了引理 3.5. □

为了得到对 $\Pi_1 y, \Pi_1 z$ 的指数估计, 把 (3.46) 写成二阶方程

$$\frac{d^2}{d\tau_0^2}\Pi_1 y = \tilde{F}_z \frac{d}{d\tau_0}\Pi_1 y + \tilde{F}_y \Pi_1 y + h_1. \tag{3.53}$$

方程 (3.53) 是非自共轭的, 不能直接套用公式 (3.26). 但是, 可把 (3.53) 化成自共轭方程后就能用公式 (3.26) 了,

$$\begin{aligned}
\Pi_1 y &= \Pi_1 y(0)\frac{\tilde{z}(\tau_0)}{\tilde{z}(0)} + \tilde{z}(\tau_0)\int_0^{\tau_0} \frac{d\eta}{\tilde{z}^2(\eta)p(\eta)}\int_0^{\eta} \tilde{z}(\sigma)p(\sigma)h_1(\sigma)\,d\sigma \\
&= \Pi_1 y(0)\frac{\tilde{z}(\tau_0)}{\tilde{z}(0)} + K(\tau_0).
\end{aligned} \tag{3.54}$$

这里 $p = e^{-\int_0^{\tau_0} \tilde{F}_z d\tau_0}$ 是自共轭因子.

引理 3.6 对边界层函数 $\Pi_1 y(\tau_0)$, $\Pi_1 z(\tau_0)$ 有下面估计式

$$\overline{C}_0 \mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_1 \tau_0} \leqslant \Pi_1 y(\tau_0) \leqslant \underline{C}_0 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau_0}, \tag{3.55}$$

$$\overline{C}_1 \mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_1 \tau_0} \leqslant \Pi_1 z(\tau_0) \leqslant \underline{C}_1 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau_0}, \quad \tau_0 \geqslant 0, \tag{3.56}$$

这里 $\overline{C}_1$, $\underline{C}_1$ 是任意常数.

证明 只要对 $\Pi_1 y$ 进行估计即可. 因为对 (3.54) 微分后就可得到对 $\Pi_1 z$ 的估计. 在推导中所有的常数, 只要不依赖于 μ, 都用同一个字母 C 来记.

先对 p 进行估计, 可把它写成

$$p = \mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_0} \tilde{F}_z \, \mathrm{d}\tau_0} = \mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_0} \bar{F}_z \, \mathrm{d}\tau_0} \mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_0} (\tilde{F}_z - \bar{F}_z) \, \mathrm{d}\tau_0}.$$

因为

$$\tilde{F}_z - \bar{F}_z = F_{zz}^* \Pi_0 z + F_{zy}^* \Pi_0 y,$$

所以 $p = C\mathrm{e}^{-\bar{F}_z \tau_0}$, 进而得到

$$C\mathrm{e}^{-\bar{F}_z \tau_0} \mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0 \tau_0} < \tilde{z} p < C\mathrm{e}^{-\bar{F}_z \tau_0} \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau_0},$$

即

$$C\mathrm{e}^{-\bar{F}_z \tau_0} \mathrm{e}^{(\lambda_2 - \delta)\tau_0} < \tilde{z} p < C\mathrm{e}^{-\bar{F}_z \tau_0} \mathrm{e}^{(\lambda_2 + \delta)\tau_0}. \tag{3.57}$$

由此可得

$$(\tilde{z} p)^{-1} < C^{-1} \mathrm{e}^{\bar{F}_z \tau_0} \mathrm{e}^{(-\lambda_2 + \delta)\tau_0} < C\mathrm{e}^{(\lambda_1 + \delta)\tau_0},$$

这里用到了 $\lambda_1 + \lambda_2 = \bar{F}_z$.

对 h_1 的估计类似于 (3.25), 有

$$|h_1| < C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau_0} = C\mathrm{e}^{(\lambda_2 + \delta)\tau_0}. \tag{3.58}$$

对 (3.57) 积分有

$$\left| \int_0^{\eta} \tilde{z} p h_1 \mathrm{d}\sigma \right| < C \int_0^{\eta} \mathrm{e}^{(-\lambda_1 + \lambda_2 + 2\delta)\sigma} \, \mathrm{d}\sigma < C\mathrm{e}^{(-\lambda_1 + \lambda_2 + 2\delta)\eta}.$$

往下利用 $\tilde{z} \equiv \Pi_0 z > C\mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0 \tau_0}$, 可得 $\tilde{z}^{-1} < C^{-1} \mathrm{e}^{(-\lambda_2 + \delta)\tau_0}$.

因此在 (3.54) 中对 $K(\tau_0)$ 有估计

$$|K(\tau_0)| < C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau_0} \int_0^{\tau_0} \mathrm{e}^{4\delta\eta} \, \mathrm{d}\eta.$$

只要取 δ 充分小, 就有

$$|K(\tau_0)| < C\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_1 \tau_0}. \tag{3.59}$$

因为 (3.54) 中第一项具有和 $\tilde{z}$ 一样估计, 所以对 $\Pi_1 y$ 有和 (3.59) 一样的估计. 这样引理 3.6 证毕. □

到此为止, 我们构造了 $\bar{z}_0$, φ, $\Pi_0 y$, $\Pi_0 z$, $\Pi_1 y$, $\Pi_1 z$. 同样可求出边界函数 Ry, Rz 的零次近似和一次近似, 并得到它们的指数估计.

3.2.2 余项估计的方法

类似于上一节的定理 3.2, 可以证明问题 (3.37) 解的存在性和余项估计. 但是, 不能套用上一节的的 Nagumo 定理进行证明. 因为方程 (3.37) 的右端含有一阶导数, 但是存在更一般的 Nagumo 定理.

考虑下面问题

$$\begin{cases} y'' = F(y', y, t), \quad 0 < t < 1, \\ y(0) = y^0, \quad y(1) = y^1, \end{cases} \tag{3.60}$$

其中 F 定义在下面区域 $\bar{G}$ 上

$$\bar{G} = \{(t, y, y') \,|\, 0 < t < 1,\, A < y < B,\, -\infty < y' < \infty\}.$$

定理 3.4 (广义 Nagumo 定理) 假设存在二次连续可微的函数 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 有

1) $L\alpha \geqslant 0, \quad L\beta \leqslant 0$;

2) $\alpha(0) \leqslant y^0 \leqslant \beta(0), \quad \alpha(1) \leqslant y^1 \leqslant \beta(1)$,

且函数 $F(y', y, t)$ 在 $\bar{G}$ 上关于 y 和 y' 具有连续偏导数和满足不等式 $|F(y', y, t)| < \varphi(|y'|)$, 这里 φ 是某个满足下面积分条件的正连续函数

$$\int_0^\infty \frac{u\mathrm{d}u}{\varphi(u)} = \infty, \tag{3.61}$$

那么存在 (3.60) 的解 $y(t)$, 且满足不等式 $\alpha(t) \leqslant y(t) \leqslant \beta(t)$.

注释 3.4 在定理 3.4 中 $\varphi(u)$ 可以取这种函数 $\varphi(u) = 1 + |u|$, $\varphi(u) = 1 + u^2$. 但 $\varphi(u) = 1 + |u|^{2+\alpha}$, $\alpha > 0$ 却不行. 因为这时积分 (3.61) 必须发散.

可以用推广的 Nagumo 定理对问题 (3.37) 进行估计, 关键是构造合适的上下解, 有兴趣的读者可参看有关文献.

3.3 Tikhonov 系统

我们考虑下面方程组和边值

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = F(z, y, t), & (3.62) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(z, y, t), & (3.63) \\ y(0, \mu) = y^0, & (3.64) \\ az(0, \mu) = az^0, \quad bz(1, \mu) = bz^1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

其中 $z, z^0, z^1, F \in \Re^M$, $y, y^0, f \in \Re^m$, 而 a, b 是下面形式的 M 阶方阵

$$a = \begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{M-k} \end{bmatrix}.$$

由此可见, 在区间 [0, 1] 的左端点给出了 z 的 k 个分量初值, 而在右端点给出了 z 剩下的 $M-k$ 个终值. 所有必需条件我们将在下面讨论中逐步给出.

[$\mathrm{H}_{3.9}$] 假设函数 $F(z,y,t)$ 和 $f(z,y,t)$ 在变量 (z,y,t) 空间的某个开区域 G 中对所有变量具有 $n+2$ 阶的连续偏导数.

在 (3.62), (3.63) 中令 $\mu=0$ 之后即得退化方程组

$$0 = F(\bar{z},\bar{y},t), \quad \frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t} = f(\bar{z},\bar{y},t), \tag{3.65}$$

并对其给定初始条件

$$\bar{y}(0) = y^0. \tag{3.66}$$

[$\mathrm{H}_{3.10}$] 假设退化问题 (3.65), (3.66) 有孤立解 $\bar{y}=\bar{y}(t)$, $\bar{z}=\varphi(\bar{y}(t),t)=\bar{z}(t)$.

[$\mathrm{H}_{3.11}$] 假设矩阵 $\bar{F}_z(t) = F_z(\bar{z}(t),\bar{y}(t),t)$ 的特征根满足条件

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\bar{\lambda}_i(t) < 0, \quad i = 1,\cdots, \quad k < M, \\ &\mathrm{Re}\bar{\lambda}_i(t) > 0, \quad i = k+1,\cdots,M, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{aligned} \tag{3.67}$$

(并称方程 $F(z,y,t)=0$ 的根 $z=\varphi(y,t)$ 是条件稳定的).

[$\mathrm{H}_{3.12}$] 令 $B(t)$ 是一个将 $\bar{F}_z(t)$ 化成对角分块矩阵, 而 $B_{11}(t)$ 和 $B_{22}(t)$ 分别为 $B(t)$ 的 $k\times k$ 阶和 $(M-k)\times(M-k)$ 阶的主对角分块. 假设 $\det B_{11}(0) \neq 0$, $\det B_{22}(1) \neq 0$.

3.3.1 渐近解的构造

我们将构造问题 (3.62)—(3.64) 具有下面形式的渐近展开式

$$x(t,\mu) = \bar{x}(t,\mu) + \Pi x(\tau_0,\mu) + Rx(\tau_1,\mu), \tag{3.68}$$

其中

$$\bar{x}(t,\mu) = \bar{x}_0(t) + \mu\bar{x}_1(t) + \cdots + \mu^k\bar{x}_k(t) + \cdots \tag{3.69}$$

为正则级数;

$$\Pi x(\tau_0,\mu) = \Pi_0 x(\tau_0) + \mu\Pi_1 x(\tau_0) + \cdots + \mu^k\Pi_k x(\tau_0) + \cdots \tag{3.70}$$

表示在 $t=0$ 邻域的边界层级数, $\tau_0 = t/\mu \geqslant 0$;

$$Rx(\tau_1,\mu) = R_0 x(\tau_1) + \mu R_1 x(\tau_1) + \cdots + \mu^k R_k x(\tau_1) + \cdots \tag{3.71}$$

表示在 $t=1$ 邻域的边界层级数, $\tau_1=(t-1)/\mu\leqslant 0$.

利用边界层函数法, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\mu\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Pi z}{\mathrm{d}\tau_0}+\frac{\mathrm{d}Rz}{\mathrm{d}\tau_1}=\bar{F}+\Pi F+RF,\\
&\mu\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Pi y}{\mathrm{d}\tau_0}+\frac{\mathrm{d}Ry}{\mathrm{d}\tau_1}=\mu(\bar{f}+\Pi f+Rf),
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

其中

$$
\bar{F}\equiv F(\bar{z}(t,\mu),\bar{y}(t,\mu),t)=\bar{F}_0+\mu\bar{F}_1+\cdots+\mu^k\bar{F}_k+\cdots, \tag{3.73}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi F\equiv{}&F(\bar{z}(\mu\tau_0,\mu)+\Pi z(\tau_0,\mu),\bar{y}(\mu\tau_0,\mu)+\Pi y(\tau_0,\mu),\mu\tau_0)\\
&-F(\bar{z}(\mu\tau_0,\mu),\bar{y}(\mu\tau_0,\mu),\mu\tau_0)\\
={}&\Pi_0F+\mu\Pi_1F+\cdots+\mu^k\Pi_kF+\cdots,
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

$$
\begin{aligned}
RF\equiv{}&F(\bar{z}(1+\mu\tau_1,\mu)+Rz(\tau_1,\mu),\bar{y}(1+\mu\tau_1,\mu)+Ry(\tau_1,\mu),1+\mu\tau_1)\\
&-F(\bar{z}(1+\mu\tau_1,\mu),\bar{y}(1+\mu\tau_1,\mu),1+\mu\tau_1)\\
={}&R_0F+\mu R_1F+\cdots+\mu^kR_kF+\cdots.
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

为了得到相应的定解条件, 将 (3.68) 代入边值 (3.64) 有

$$
a[\bar{z}_0(0)+\Pi_0z(0)+\cdots+\mu^k(\bar{z}_k(0)+\Pi_kz(0))+\cdots]=az^0, \tag{3.76}
$$

$$
b[\bar{z}_0(1)+R_0z(0)+\cdots+\mu^k(\bar{z}_k(1)+R_kz(0))+\cdots]=bz^1, \tag{3.77}
$$

$$
\bar{y}_0(0)+\Pi_0y(0)+\cdots+\mu^k(\bar{y}_k(0)+\Pi_ky(0))+\cdots=y^0. \tag{3.78}
$$

渐近解的零次项系数满足下面方程组

$$
\left\{
\begin{aligned}
&0=\bar{F}_0=F(\bar{z}_0,\bar{y}_0,t), &(3.79)\\
&\frac{\mathrm{d}\bar{y}_0}{\mathrm{d}t}=\bar{f}_0=f(\bar{z}_0,\bar{y}_0,t), &(3.80)
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\Pi_0z}{\mathrm{d}\tau_0}=\Pi_0F=F(\bar{z}_0(0)+\Pi_0z,\bar{y}_0(0)+\Pi_0y,0), &(3.81)\\
&\frac{\mathrm{d}\Pi_0y}{\mathrm{d}\tau_0}=0, &(3.82)
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}R_0z}{\mathrm{d}\tau_1}=R_0F=F(\bar{z}_0(1)+R_0z,\bar{y}_0(1)+R_0y,1), &(3.83)\\
&\frac{\mathrm{d}R_0y}{\mathrm{d}\tau_1}=0. &(3.84)
\end{aligned}
\right.
$$

关于这些方程组的定解条件是

$$
a(\bar{z}_0(0)+\Pi_0z(0))=az^0, \tag{3.85}
$$

$$
b(\bar{z}_0(1)+R_0z(0))=bz^1, \tag{3.86}
$$

$$
\bar{y}_0(0)+\Pi_0y(0)=y^0. \tag{3.87}
$$

由 (3.82), (3.84) 即知 $\Pi_0 y(\tau_0) \equiv$ 常数, $R_0 y(\tau_1) \equiv$ 常数. 又当 $\tau_0 \to \infty$ 和 $\tau_1 \to -\infty$ 时 $\Pi_0 y(\tau_0)$ 和 $R_0 y(\tau_1)$ 都应当趋于零, 因此这些常数都应该等于零, 即

$$\Pi_0 y(\tau_0) \equiv 0, \quad R_0 y(\tau_1) \equiv 0. \tag{3.88}$$

从 (3.87) 得

$$\bar{y}_0(0) = y^0. \tag{3.89}$$

于是方程组 (3.79), (3.80) 与初始条件 (3.89) 一起就是退化问题, 求解这个问题得出 $\bar{y}_0 = \bar{y}(t)$, $\bar{z}_0 = \varphi(\bar{y}_0(t), t) = \bar{z}(t)$.

下面考虑边值问题 (3.81), (3.85)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_0 z}{\mathrm{d}\tau_0} = F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0), 0), & (3.90) \\ a(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(0)) = az^0, \quad \Pi_0 z(\infty) = 0. & (3.91) \end{cases}$$

为了讨论方便起见, 做变量替换 $\tilde{z} = \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau_0)$, 把 (3.90), (3.91) 写成下面形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau_0} = F(\tilde{z}, y^0, 0), & (3.92) \\ a\tilde{z} = az^0, \quad \tilde{z}(\infty) = \bar{z}_0(0). & (3.93) \end{cases}$$

由条件 [$H_{3.11}$], [$H_{3.12}$] 可知方程组 (3.92) 存在经过平衡点 $\bar{z}_0(0)$ 的 k 维稳定的不变流形 S^+. 只要初值落在 S^+ 上, 当 $\tau_0 \to \infty$ 时都有 $\lim\limits_{\tau_0 \to \infty} \tilde{z}(\tau_0) = \bar{z}_0(0)$. 为此必须对 (3.92) 的初值有要求

[$H_{3.13}$]　假设 $az^0 \in S^+$.

条件 [$H_{3.13}$] 保证了问题 (3.92), (3.93) 解的存在性. 对 $R_0 z(\tau_1)$ 可作同样的讨论, 但是必须有下面条件

[$H_{3.14}$]　假设 $bz^1 \in S^-$.

这里 S^- 是方程组 (3.83), (3.86) 的 $M-k$ 维稳定不变流形 $(\tau_1 \to -\infty)$.

现在考虑关于 $\bar{x}_1(t)$, $\Pi_1 x(\tau_0)$, $R_1 x(\tau_1)$ 的方程组和定解条件

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{z}_0}{\mathrm{d}t} = \bar{F}_z(t)\bar{z}_1 + \bar{F}_y(t)\bar{y}_1, & (3.94) \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_1}{\mathrm{d}t} = \bar{f}_z(t)\bar{z}_1 + \bar{f}_y(t)\bar{y}_1. & (3.95) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_1 z}{\mathrm{d}\tau_0} = \Pi_1 F = F_z(\tau_0)\Pi_1 z + F_y(\tau_0)\Pi_1 y + G_1(\tau_0), & (3.96) \\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_1 y}{\mathrm{d}\tau_0} = \Pi_0 f(\tau_0), & (3.97) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}R_1 z}{\mathrm{d}\tau_1} = R_1 F = F_z(\tau_1)R_1 z + F_y(\tau_1)R_1 y + H_1(\tau_1), & (3.98) \\ \dfrac{\mathrm{d}R_1 y}{\mathrm{d}\tau_1} = R_0 f(\tau_1), & (3.99) \end{cases}$$

$$a(\bar{z}_1(0)+\Pi_1 z(0))=0, \tag{3.100}$$

$$b(\bar{z}_1(1)+R_1 z(0))=0, \tag{3.101}$$

$$\bar{y}_1(0)+\Pi_1 y(0)=0. \tag{3.102}$$

由 $\Pi_1 y(\infty)=0$, 先从 (3.97) 求出 $\Pi_1 y(\tau_0)$, $\Pi_1 y(0)$

$$\Pi_1 y(\tau_0)=-\int_{\tau_0}^{\infty}\Pi_0 f(s)\mathrm{d}s,\quad \Pi_1 y(0)=-\int_0^{\infty}\Pi_0 f(s)\mathrm{d}s.$$

由此可得

$$\bar{y}_1(0)=\int_0^{\infty}\Pi_0 f(s)\mathrm{d}s, \tag{3.103}$$

因为方程组 (3.94), (3.95) 是线性的, 考虑到初值 (3.103), 所以 $\bar{y}_1(t)$, $\bar{z}_1(t)$ 容易求得.

求出 $\Pi_1 y(\tau_0)$ 后, 把 (3.96) 写成

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_1 z}{\mathrm{d}\tau_0}=F_z(\tau_0)\Pi_1 z+\tilde{G}_1(\tau_0), \tag{3.104}$$

其中 $\tilde{G}_1(\tau_0)$ 是已知函数.

方程组 (3.104) 关于 $\Pi_1 z(\tau_0)$ 是线性的, 对定解条件 (3.100) 和 $\Pi_1 z(\infty)=0$, 解总是存在的. 同样的讨论也适合于求解 $R_1 z(\tau_1)$.

对渐近解的 $k\,(k\geqslant 2)$ 次项系数 $\bar{x}_k(t)$, $\Pi_k x(\tau_0)$, $R_k x(\tau_1)$ 可得下列方程组和定解条件

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\bar{z}_{k-1}}{\mathrm{d}t}=\bar{F}_z(t)\bar{z}_k+\bar{F}_y(t)\bar{y}_k+\bar{F}_k(t),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_k}{\mathrm{d}t}=\bar{f}_z(t)\bar{z}_k+\bar{f}_y(t)\bar{y}_k+\bar{f}_k(t),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\Pi_k z}{\mathrm{d}\tau_0}=\Pi_k F=F_z(\tau_0)\Pi_k z+F_y(\tau_0)\Pi_k y+G_k(\tau_0),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\Pi_k y}{\mathrm{d}\tau_0}=\Pi_{k-1}f(\tau_0),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}R_k z}{\mathrm{d}\tau_1}=R_k F=F_z(\tau_1)R_k z+F_y(\tau_1)R_k y+H_k(\tau_1),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}R_k y}{\mathrm{d}\tau_1}=R_{k-1}f(\tau_1),\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&a(\bar{z}_k(0)+\Pi_k z(0))=0,\quad b(\bar{z}_k(1)+R_k z(0))=0,\\&\bar{y}_k(0)+\Pi_k y(0)=0,\\&\Pi_k z(\infty)=0,\quad \Pi_k y(\infty)=0,\\&R_k z(-\infty)=0,\quad R_k y(-\infty)=0,\\&\bar{y}_k(0)=\int_0^{\infty}\Pi_{k-1}f(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

求解这些问题的过程完全类同于 $k=1$ 的情况, 在此不再赘述. 这样渐近展开式 (3.68) 可完全确定. 用 $X_n(t,\mu)$ 表示 (3.68) 的前 $n+1$ 项阶部分和

$$X_n(t,\mu)=\sum_{k=0}^{n}\mu^k(\bar{x}_k(t)+\Pi_k x(\tau_0)+R_k x(\tau_1)). \tag{3.105}$$

我们把本节得到的结果写成下面的基本定理.

定理 3.5 如果满足条件 $[H_{3.9}]$—$[H_{3.14}]$, 则必存在正常数 μ_0, δ 和 C, 使得当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时, 在曲线 L_0 的 δ 领域中存在边值问题 (3.62)—(3.64) 的惟一解 $x(t,\mu)$, 且满足不等式

$$\|x(t,\mu)-X_n(t,\mu)\|\leqslant C\mu^{n+1},\quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{3.106}$$

这里 L_0 由下面三条线段组成:

$$\begin{aligned}
L_{01}&=\{(z,y,t)|z=\bar{z}_0(0)+\Pi_0 z(\tau_0),\ \tau_0\geqslant 0,\ y=\bar{y}_0(0),\ t=0\},\\
L_{02}&=\{(z,y,t)|z=\bar{z}_0(t),\ y=\bar{y}_0(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\},\\
L_{03}&=\{(z,y,t)|z=\bar{z}_0(1)+\Pi_0 z(\tau_1),\ \tau_0\leqslant 0,\ y=\bar{y}_0(1),\ t=1\}.
\end{aligned}$$

由于所论边值问题 (3.62)—(3.64) 是向量情况, 所以不能套用 Nagumo 定理来证明定理 3.5, 而需要利用边值问题的 Green 函数来证明 [1]. 虽然证明过程占据相当篇幅, 但有志者定可理解和掌握.

渐近展开式中的边界层函数 $\Pi x(\tau_0)$, $Rx(\tau_1)$ 都是指数式衰减函数, 在此也不做详细证明. 我们只把该性质作为引理提一下 [1].

引理 3.7 对边界层函数 $\Pi_k x(\tau_0)$, $R_k x(\tau_1)\,(k=1,2,\cdots,n)$, 有下面指数估计式

$$\|\Pi_k x(\tau_0)\|\leqslant Ce^{-\kappa_0\tau_0},\quad \tau_0\geqslant 0, \tag{3.107}$$

$$\|R_k x(\tau_1)\|\leqslant Ce^{\kappa_1\tau_1},\quad \tau_1\leqslant 0. \tag{3.108}$$

注释 3.5 条件 $[H_{3.9}]$ 中关于函数 $F(z,y,t)$, $f(z,y,t)$ 具有 $n+2$ 阶连续偏导数可要求在 L_0 的 δ 邻域即可.

3.4 一般边值问题

对 Tikhonov 方程组 (3.62), (3.63) 本节将给出一般边界条件 [80, 84]

$$R(x(0,\mu),x(1,\mu))=0, \tag{3.109}$$

并引用 Есипова 的工作 [84] 来讨论其解的渐近性态, 其中 R 是 $(M+m)$ 维向量值函数, 而 x 为合并 y 和 z 的分量而组成的 $(M+m)$ 维列向量, 即 $x=(y^T,z^T)^T$.

在最优控制理论中，当为了优化而加上必要条件时，就遇到 (3.62), (3.63), (3.109) 类型的问题. 为了方便表示，把 (3.64) 写成

$$az(0,\mu)+bz(1,\mu)=z^*, \qquad y(0,\mu)=y^*. \tag{3.110}$$

在下面的推导中要用到上节对问题 (3.62), (3.63), (3.110) 得到的结果定理 3.5，因此我们称问题 (3.62), (3.63), (3.110) 为辅助边值问题.

假设满足条件 $[\mathrm{H}_{3.9}]$—$[\mathrm{H}_{3.14}]$，把边界条件 (3.110) 的向量写成

$$x^*=x_0^*+\mu x_1^*+\cdots+\mu^k x_k^*+\cdots. \tag{3.111}$$

利用 3.3 节所描述的方法，我们得到辅助问题 (3.62), (3.63), (3.110) 解的如下渐近表达式 ($\tau_0=t/\mu$, $\tau_1=(t-1)/\mu$)：

$$x(t,\mu)=\bar{x}(t,\mu)+\Pi x(\tau_0,\mu)+Qx(\tau_1,\mu), \tag{3.112}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\bar{x}(t,\mu)=\bar{x}_0(t)+\mu\bar{x}_1(t)+\cdots+\mu^k\bar{x}_k(t)+\cdots,\\
&\Pi x(\tau_0,\mu)=\Pi_0 x(\tau_0)+\mu\Pi_1 x(\tau_0)+\cdots+\mu^k\Pi_k x(\tau_0)+\cdots,\\
&Qx(\tau_1,\mu)=Q_0 x(\tau_1)+\mu Q_1 x(\tau_1)+\cdots+\mu^k Q_k x(\tau_1)+\cdots.
\end{aligned}$$

这个展开式包含了参数 $x_k^*\,(k=0,1,2,\cdots)$，我们打算这样来确定这些参数，使得展开式 (3.112) 满足边界条件 (3.109). 为此，我们将 (3.112) 代入 (3.109) 并把 R 表示成 μ 的幂级数：

$$R=R_0+\mu R_1+\cdots+\mu^k R_k+\cdots=0. \tag{3.113}$$

于是我们得到方程序列 $R_k=0\,(k=0,1,2,\cdots)$.

考虑方程组 $R_0=0$. 显然，向量函数 R_0 的变量为 $x_0(0), x_0(1)$，具体为

$$R_0=R_0(x_0(0),x_0(1))=0, \tag{3.114}$$

其中

$$x_0(0)=\bar{x}_0(0)+\Pi_0 x(0), \qquad x_0(1)=\bar{x}_0(1)+Q_0 x(0), \tag{3.115}$$

这里 $\varphi(0)=\bar{y}_0(0)$, $\bar{z}_0(0)=\varphi(\bar{y}_0(0),0)$，而 $\bar{x}_0(1)$ 与 $y_0(0)$ 的联系是由退化方程组的初值问题

$$\bar{z}_0=\varphi(\bar{y}_0(t),t), \quad \frac{\mathrm{d}\bar{y}_0}{\mathrm{d}t}=f(\bar{z}_0,\bar{y}_0,t), \quad \bar{y}_0(0)=y_0(0) \tag{3.116}$$

建立起来的.

对于边界层函数, 我们有

$$\Pi_0 y(\tau_0) \equiv 0, \quad Q_0 y(\tau_1) \equiv 0.$$

而 $\Pi_0 z(0)$ 与 $y_0(0)$ 和 $(az_0(0))_1$ (它是由 $z_0(0)$ 的前 k 个分量组成的 k 维向量) 的联系是由有关方程组

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_0 z}{\mathrm{d}\tau_0} = F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0), 0) \tag{3.117}$$

和定解条件

$$a(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(0)) = az_0(0) \tag{3.118}$$

一起建立起来的. 类似地, $Q_0 z(0)$ 与 $y_0(0)$ 和 $(bz_0(1))_2$ (它是由 $z_0(1)$ 的后 $M-k$ 个分量组成的 $(M-k)$ 维向量) 的联系是由方程组

$$\frac{\mathrm{d}Q_0 z}{\mathrm{d}\tau_1} = F(\bar{z}_0(1) + Q_0 z, \bar{y}_0(1), 1) \tag{3.119}$$

和定解条件

$$b(\bar{z}_0(1) + Q_0 z(0)) = bz_0(1) \tag{3.120}$$

一起建立起来的. 因此在 (由 $M+m$ 个方程构成的) 方程组 (3.114) 中, 未知量就是向量 $y_0(0)$, $(az_0(0))_1$ 和 $(bz_0(1))_2$ 的分量, 亦即总共有 $M+m$ 个未知量.

令 x_0^* 为由 $(az_0(0))_1$, $(bz_0(1))_2$, $y_0(0)$ 三个向量组成的 $M+m$ 个未知量, 即

$$x_0^* = \begin{pmatrix} (az_0(0))_1 \\ (bz_0(1))_2 \\ y_0(0) \end{pmatrix}. \tag{3.121}$$

我们假设下面的条件成立:

[$\mathrm{H}_{3.15}$] 假设方程组 (3.114) 关于 x_0^* 有惟一解 x_0^0, 且在该点处的 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{DR_0}{Dx_0^*}\right|_{x_0^*=x_0^0} = \det\left(\frac{\partial R_0}{\partial x_0^*}\right)\bigg|_{x_0^*=x_0^0} = \Delta_0^0 \neq 0. \tag{3.122}$$

我们来研究一下 Δ_0^0 的结构. 令 R^1 和 R^2 为 R_0 分别对其向量值变量 $x_0(0)$ 和 $x_0(1)$ 的导数矩阵

$$R^1 = \frac{\partial R_0}{\partial x_0(0)}, \qquad R^2 = \frac{\partial R_0}{\partial x_0(1)}.$$

于是有

$$\Delta_0^0 = \det\left((R^1)_0^0 \left.\frac{\partial x_0(0, x_0^*)}{\partial x_0^*}\right|_{x_0^*=x_0^0} + (R^2)_0^0 \left.\frac{\partial x_0(1, x_0^*)}{\partial x_0^*}\right|_{x_0^*=x_0^0}\right), \tag{3.123}$$

其中

$$(R^i)^0_0 = R^i(x_0(0,x_0^*), x_0(1,x_0^*))|_{x_0^*=x_0^0}, \quad i=1,2.$$

由 (3.115),(3.122)

$$\left.\frac{\partial x_0(0,x_0^*)}{\partial x_0^*}\right|_{x_0^*=x_0^0} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial z_0(0)}{\partial(az_0(0))_1} & 0 & \frac{\partial z_0(0)}{\partial y_0(0)} \\ 0 & 0 & E_m \end{bmatrix}\right|_{x_0^*=x_0^0}, \tag{3.124}$$

$$\left.\frac{\partial x_0(1,x_0^*)}{\partial x_0^*}\right|_{x_0^*=x_0^0} = \left.\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial z_0(1)}{\partial(bz_0(1))_2} & \frac{\partial z_0(1)}{\partial y_0(0)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial y_0(1)}{\partial y_0(0)} \end{bmatrix}\right|_{x_0^*=x_0^0}. \tag{3.125}$$

我们更详细地考察矩阵 (3.124) 中的分块：

$$\frac{\partial z_0(0)}{\partial(az_0(0))_1} = \frac{\partial(\bar{z}_0(0)+\Pi_0 z(0))}{\partial(az_0(0))_1} = \frac{\partial \Pi_0 z(0)}{\partial(az_0(0))_1}.$$

如果记

$$\frac{\partial \Pi_0 z}{\partial(az_0(0))_1} \triangleq \xi_0^\Pi(\tau_0)$$

那么 $\xi_0^\Pi(\tau_0)$ 满足由方程 (3.117) 对 $(az_0(0))_1$ 求导而得到的如下方程组：

$$\frac{\mathrm{d}\xi_0^\Pi}{\mathrm{d}\tau_0} = F_z(\tau_0)\xi_0^\Pi, \tag{3.126}$$

以及定解条件

$$a\xi_0^\Pi(0) = E_k, \qquad \xi_0^\Pi(\infty) = 0, \tag{3.127}$$

其中

$$F_z(\tau_0) \triangleq F_z(\bar{z}_0(0)+\Pi_0 z(\tau_0), \bar{y}_0(0), 0).$$

我们写出 $\dfrac{\partial z_0(0)}{\partial y_0(0)} = \dfrac{\partial \bar{z}_0(0)}{\partial y_0(0)} + \dfrac{\partial \Pi_0 z(0)}{\partial y_0(0)}$，并引进记号

$$\frac{\partial \bar{z}_0(0)}{\partial y_0(0)} \triangleq \theta_0^0(0), \qquad \frac{\partial \Pi_0 z}{\partial y_0(0)} \triangleq \zeta_0^\Pi,$$

这里 $\theta_0^0(0)$ 是方程组

$$\bar{F}_z(0)\theta_0^0(0) + \bar{F}_y(0)E_m = 0 \tag{3.128}$$

的一个解，这个方程组是由方程组 $F(\bar{z}_0(0),\ \bar{y}_0(0),0) = 0$ 对 $y_0(0)$ 求导得到的，其中 $\bar{F}_z(0) = F_z(\bar{z}_0(0),\ \bar{y}_0(0),0), \bar{F}_y(0) = F_y(\bar{z}_0(0),\ \bar{y}_0(0),0)$．而函数 $\zeta_0^\Pi(\tau_0)$ 满足由方程组 (3.117) 对 $y_0(0)$ 求导得到的方程组：

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_0^\Pi}{\mathrm{d}\tau_0} = F_z(\tau_0)\zeta_0^\Pi + F_z(\tau_0)\theta_0^0(0) + F_y(\tau_0)E_m \tag{3.129}$$

以及定解条件

$$a\zeta_0^{\Pi}(0) = -a\theta_0^0(0), \qquad \zeta_0^0(\infty) = 0. \tag{3.130}$$

对于 (3.125) 式中的分块矩阵, 利用类似的方法, 我们得到

$$\frac{\partial z_0(1)}{\partial(bz_0(1))_2} = \frac{\partial[\bar{z}_0(1) + Q_0 z(0)]}{\partial(bz_0(1))_2} = \frac{\partial Q_0 z(0)}{\partial(bz_0(1))_2} \triangleq \xi_0^Q(0),$$

其中 $\xi_0^Q(\tau_1)$ 满足方程组

$$\frac{\mathrm{d}\xi_0^Q}{\mathrm{d}\tau_1} = F_z(\tau_1)\xi_0^Q \tag{3.131}$$

和定解条件

$$b\xi_0^Q(0) = E_{M-k}, \qquad \xi_0^Q(-\infty) = 0, \tag{3.132}$$

这里

$$F_z(\tau_1) \triangleq F_z(\bar{z}_0(1) + Q_0 z(\tau_1), \bar{y}_0(1), 1).$$

我们现在写出

$$\frac{\partial z_0(1)}{\partial y_0(0)} = \frac{\partial \bar{z}_0(1)}{\partial y_0(0)} + \frac{\partial Q_0 z(0)}{\partial y_0(0)},$$

并引进记号

$$\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial y_0(0)} \triangleq \theta_0^1, \qquad \frac{\partial Q_0 z}{\partial y_0(0)} \triangleq \zeta_0^Q, \qquad \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial y_0(0)} \triangleq \eta_0^1,$$

于是有

$$\frac{\partial z_0(1)}{\partial y_0(0)} = \theta_0^1(1) + \zeta_0^Q(0), \qquad \frac{\partial y_0(1)}{\partial y_0(0)} = \frac{\partial \bar{y}_0(1)}{\partial y_0(0)} = \eta_0^1(1),$$

其中 θ_0^1 和 η_0^1 为代数 – 微分方程组初值问题

$$\bar{F}_z\theta_0^1 + \bar{F}_y\eta_0^1 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\eta_0^1}{\mathrm{d}t} = \bar{f}_z\theta_0^1 + \bar{f}_y\eta_0^1, \quad \eta_0^1(0) = E_m \tag{3.133}$$

的解, 这里 $\bar{F}_z \triangleq F_z(\bar{z}(1), \bar{y}(1), 1)$, 而 $\bar{F}_y, \bar{f}_z$, 以及 $\bar{f}_y$ 有类似的定义. 函数 $\zeta_0^Q(\tau_1)$ 满足由方程组 (3.119) 对 $y_0(0)$ 求导得到的方程组

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_0^Q}{\mathrm{d}\tau_1} = F_z(\tau_1)\zeta_0^Q + F_z(\tau_1)\theta_0^1(1) + F_y(\tau_1)\eta_0^1 \tag{3.134}$$

以及定解条件

$$b\zeta_0^Q(0) = -b\theta_0^1(1), \quad \zeta_0^Q(-\infty) = 0. \tag{3.135}$$

我们现在讨论方程组 $R_k = 0\,(k \geqslant 1)$, 显然它们有如下形式:

$$R_k = \left(R^1\right)_0^0 x_k(0) + \left(R^2\right)_0^0 x_k(1) + r_k = 0, \tag{3.136}$$

其中非齐次项 r_k 只依赖于 $i<k$ 的 $[az_i(0)]_1$, $[bz_i(1)]_2$ 以及 $y_i(0)$. 由于

$$x_k = \bar{x}_k + \Pi_k x + Q_k x, \tag{3.137}$$

而且对 $k \geqslant 1$, 在 (3.137) 中所有的项都是用线性微分方程组的初值问题来确定的. 此外, 在这些方程组的初始条件中, 都只是线性地依赖于 $[az_k(0)]_1$, $[bz_k(1)]_2$ 和 $y_k(0)$. 因此我们断定: 方程组 (3.136) 是未知量 $[az_k(0)]_1$, $[bz_k(1)]_2$, 和 $y_k(0)$ 的线性代数方程组. 令 x_k^* 为由三个分块 $[az_k(0)]_1$, $[bz_k(1)]_2$ 和 $y_k(0)$ 做成的 $M+m$ 维向量; 于是 (3.136) 就是一个含有 x_k^* 的 $M+m$, 个分量的 $M+m$ 维线性代数方程组. 这个方程组的系数行列式为

$$\Delta_k^0 = \det\left((R^1)_0^0 \frac{\partial x_k(0,x_k^*)}{\partial x_k^*} + (R^2)_0^0 \frac{\partial x_k(1,x_k*)}{\partial x_k^*}\right), \tag{3.138}$$

其中

$$\frac{\partial x_k(0,x_k^*)}{\partial x_k^*} \quad \text{和} \quad \frac{\partial x_k(1,x_k^*)}{\partial x_k^*}$$

与表达式 (3.124), (3.125) 完全一样, 只是应将其中的下标 0 改成 k 即可. 我们可以证明 $\Delta_k^0 = \Delta_0^0$. 为此, 只需证明矩阵 $\dfrac{\partial x_k(0,x_k^*)}{\partial x_k^*}$ 和 $\dfrac{\partial x_k(1,x_k^*)}{\partial x_k^*}$ 中的分块类似于在 (3.124), (3.125) 中相应的情况都由同样的方程组和定解条件所确定.

作为一个例子, 考虑在 $\dfrac{\partial x_k(0,x_k^*)}{\partial x_k^*}$ 中的分块 $\dfrac{\partial z_k(0)}{\partial[az_k(0)]_1}$:

$$\frac{\partial z_k(0)}{\partial[az_k(0)]_1} = \frac{\partial(\bar{z}_k(0)+\Pi_k z(0))}{\partial[az_k(0)]_1} = \frac{\partial \Pi_k z(0)}{\partial[az_k(0)]_1} = \xi_k^{\Pi}(\tau_0),$$

这里 $\xi_k^{\Pi}(\tau_0)$ 满足将 $\Pi_k z(\tau_0)$ 对 $[az_k(0)]_1$ 求导得到的方程组:

$$\frac{\mathrm{d}\xi_k^{\Pi}}{\mathrm{d}\tau_0} = F_z(\tau_0)\xi_k^{\Pi}, \tag{3.139}$$

以及条件

$$a\xi_k^{\Pi}(0) = E_k, \qquad \xi_k^{\Pi}(\infty) = 0. \tag{3.140}$$

对于 ξ_k^{Π} 的问题 (3.139), (3.140) 与对于 ξ_0^{Π} 的问题 (3.126), (3.127) 完全一样, 因此 $\xi_k^{\Pi} \equiv \xi_0^{\Pi}$.

于是我们证明了 $\Delta_k^0 = \Delta_0^0$. 由于 $\Delta_0^0 \neq 0$, 根据 $[\mathrm{H}_{3.15}]$, 那么对 $k=1,2,\cdots$, 可以从方程组 (3.136) 求出 x_k^* 而得到解 $x_k^* = x_k^0$.

于是我们可以逐次地得到 (3.111) 式中所有的参数, 从而得到展开式 (3.112) 中所有的项. 这就是问题 (3.62), (3.63), (3.110) 解的渐近展开式, 这个解存在, 而且在某种意义下是惟一的.

定理 3.6 如果满足条件 $[\mathrm{H}_{3.9}]$—$[\mathrm{H}_{3.15}]$, 那么存在常数 $\mu_0>0, \delta>0$ 和 $C>0$, 使得在曲线 L_0 的 δ 邻域中, 问题 (3.62), (3.63), (3.109) 有惟一解 $X(t,\mu)$, 且对 $0\leqslant t\leqslant 1$, $0<\mu\leqslant\mu_0$ 满足

$$\| x(t,\mu)-X_n(t,\mu)\| \leqslant C\mu^{n+1}, \tag{3.141}$$

其中 $X_n(t,\mu)$ 是级数 (3.112) 的前 $n+1$ 项部分和.

注释 3.6 如果方程 $F(z,y,t)=0$ 有不止一个解, 而且还如果方程 $R_0=0$ 有几个解, 那么可能存在几个在定理中指出类型的解. 因此对于问题 (3.62), (3.63), (3.109) 来说, 在大范围内没有惟一性.

证明 令 $x(t,\mu,x^0)$ 是在定解条件 (3.110) 中 x^* 为 x^0 的问题 (3.62), (3.63), (3.110) 的解, 并将 $R(x(0,\mu,x^0),x(1,\mu,x^0))$ 看成是 x^0 和 μ 的函数. 令 $\Delta(x^0,\mu)$ 为行列式 $\dfrac{D(R)}{D(x^0)}$. 我们来证明

$$\Delta(x^0,\mu)=\Delta_0(x^0)+O(\mu), \tag{3.142}$$

其中 $\Delta_0(x^0)=\dfrac{D(R_0)}{D(x^0)}$ 是上面引进的行列式 (3.122), 在此用变量 x^0 代替 x_0^*.

行列式 Δ 的元素为

$$R^1(x(0,\mu,x^0),x(1,\mu,x^0))\frac{\partial x(0,\mu,x^0)}{\partial x^0}+R^2(x(0,\mu,x^0),x(1,\mu,x^0))\frac{\partial x(1,\mu,x^0)}{\partial x^0}. \tag{3.143}$$

由在文 [1] 中的结果推出

$$\begin{cases} x(0,\mu,x^0)=\bar{x}^0(0,x^0)+\Pi_0 x(0,x^0)+O(\mu),\\ x(1,\mu,x^0)=\bar{x}^0(1,x^0)+Q_0 x(0,x^0)+O(\mu), \end{cases} \tag{3.144}$$

其中 $\bar{x}_0(t,x^0)$ 是退化方程 (3.116) 满足 $\bar{y}_0(0)=y^0$ 的解; 而 $\Pi_0 z(\tau_0,x^0)$ 和 $Q_0 z(\tau_1,x^0)$ 是相应的辅助方程组分别满足条件

$$a(\Pi_0 z(0,x^0)+\bar{z}_0(0,x^0))=az^0, \qquad \Pi_0 z(+\infty,x^0)=0$$

和

$$b(Q_0 z(0,x^0)+\bar{z}_0(1,x^0))=bz^0, \qquad Q_0 z(-\infty,x^0)=0$$

的解, 以及 $\Pi_0 y=Q_0 y\equiv 0$.

矩阵 $\dfrac{\partial x(t,\mu,x^0)}{\partial x^0}$ 满足由方程组 (3.62), (3.63) 对 x^0 求导得到的方程组:

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x^0}\right)=F_z(z,y,t)\dfrac{\partial z}{\partial x^0}+F_y(z,y,t)\dfrac{\partial y}{\partial x^0},\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x^0}\right)=f_z(z,y,t)\dfrac{\partial z}{\partial x^0}+f_y(z,y,t)\dfrac{\partial y}{\partial x^0}, \end{cases} \tag{3.145}$$

以及从 (3.110) 得出的定解条件

$$\begin{cases} a\left(\dfrac{\partial z}{\partial x^0}\right)\Big|_{t=0}+b\left(\dfrac{\partial z}{\partial x^0}\right)\Big|_{t=1}=E_M, & \dfrac{\partial y}{\partial y^0}\Big|_{t=0}=E_m, \\ a\left(\dfrac{\partial z}{\partial y^0}\right)\Big|_{t=0}+b\left(\dfrac{\partial z}{\partial y^0}\right)\Big|_{t=1}=0, & \dfrac{\partial y}{\partial z^0}\Big|_{t=0}=0. \end{cases} \tag{3.146}$$

方程组 (3.145) 类似于方程组 (3.62), (3.63), 它们主要不同在于 μ (通过 $x(t,\mu,x^0)$) 以非正则的方法进入 (3.144) 的右端. 因此定理 3.5 的结果不能直接用于 (3.145), (3.146). 然而, 把方程组 (3.62), (3.63) 和 (3.145) 联合起来, 并以 (3.112) 和 (3.146) 为定解条件, 我们就可以利用定理 3.5 的算法来得到联合问题解的渐近展开, 虽然这个联合问题并不直接满足所有 $[H_{3.9}]$—$[H_{3.14}]$ 的条件, 但是经过对未知函数进行适当的变换 (见 [85]), 即可转变成问题 (3.62)–(3.64) 的形式, 并且证明它满足定理 3.5 的所有条件. 因此 (3.145), (3.146) 的解满足

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x^0}\right)_0=\overline{\left(\frac{\partial x}{\partial x^0}\right)_0}+\Pi_0\left(\frac{\partial x}{\partial x^0}\right)+Q_0\left(\frac{\partial x}{\partial x^0}\right)+O(\mu). \tag{3.147}$$

我们更仔细地讨论一下 (3.147) 式中的每一项. 项 $\overline{\left(\dfrac{\partial x}{\partial z^0}\right)_0}$ 是方程组

$$\begin{cases} 0=\overline{F}_z(t)\overline{\left(\dfrac{\partial z}{\partial z^0}\right)_0}+\overline{F}_y(t)\overline{\left(\dfrac{\partial y}{\partial z^0}\right)_0}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\left(\dfrac{\partial y}{\partial z^0}\right)_0}=\overline{f}_z(t)\overline{\left(\dfrac{\partial z}{\partial z^0}\right)_0}+\overline{f}_y(t)\overline{\left(\dfrac{\partial y}{\partial z^0}\right)_0} \end{cases}$$

的一个解 (其中 $\overline{F}_z(t)=F_z(\overline{z}_0(t),\overline{y}_0(t),t)$, 而 $\overline{F}_y,\overline{f}_z$ 和 $\overline{f}_y$ 类似地定义), 且根据 (3.146), 它满足初始条件 $\overline{\left(\dfrac{\partial y}{\partial z^0}\right)_0}\Big|_{t=0}=0$, 因此

$$\overline{\left(\frac{\partial x}{\partial z^0}\right)_0}\equiv 0. \tag{3.148}$$

项 $\overline{\left(\dfrac{\partial x}{\partial y^0}\right)_0}$ 也是退化方程组

$$\begin{cases} 0=\overline{F}_z(t)\overline{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y^0}\right)_0}+\overline{F}_y(t)\overline{\left(\dfrac{\partial y}{\partial y^0}\right)_0}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\left(\dfrac{\partial y}{\partial y^0}\right)_0}=\overline{f}_z(t)\overline{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y^0}\right)_0}+\overline{f}_y(t)\overline{\left(\dfrac{\partial y}{\partial y^0}\right)_0} \end{cases} \tag{3.149}$$

的一个解, 且满足条件

$$\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial y^0}\right)_0}\Big|_{t=0}=E_m. \tag{3.150}$$

我们现在考虑边界层函数. 按照求得问题 (3.145), (3.146) 解的渐近展开式 (3.147) 的方法, 我们有

$$\Pi_0\left(\frac{\partial y}{\partial x^0}\right) = Q_0\left(\frac{\partial y}{\partial x^0}\right) \equiv 0. \tag{3.151}$$

因此从 (3.148)—(3.150) 即得

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z^0}\right) = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial y^0}\right)_0\Big|_{t=0} = E_m\,,$$

以及

$$\left(\frac{\partial y}{\partial y^0}\right)\Big|_{t=1} = \overline{\left(\frac{\partial y}{\partial x^0}\right)}\Big|_{t=1}. \tag{3.152}$$

在 $O(\mu)$ 项范围之内. 函数 $\Pi_0\left(\dfrac{\partial z}{\partial z^0}\right)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0}\left(\Pi_0\left(\frac{\partial z}{\partial z^0}\right)\right) = F_z(\tau_0)\Pi_0\left(\frac{\partial z}{\partial z^0}\right) \tag{3.153}$$

满足定解条件

$$a\Pi_0\left(\frac{\partial z}{\partial z^0}\right)\Big|_{\tau_0=0} = E_k\,, \qquad \Pi_0\left(\frac{\partial z}{\partial z^0}\right)\Big|_{\tau_0\to+\infty} \to 0 \tag{3.154}$$

的解. 函数 $\Pi_0\left(\dfrac{\partial z}{\partial y^0}\right)$ 满足方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0}\left(\Pi_0\left(\frac{\partial z}{\partial y^0}\right)\right) = F_z(\tau_0)\Pi_0\left(\frac{\partial z}{\partial y^0}\right) + F_z(\tau_0)\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial y^0}\right)}_0(0) + F_y(\tau_0)\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial y^0}\right)}_0(0) \tag{3.155}$$

和定解条件

$$a\Pi_0\left(\frac{\partial z}{\partial y^0}\right)\Big|_{\tau_0=0} = -a\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial y^0}\right)}_0(0)\,; \qquad \Pi_0\left(\frac{\partial z}{\partial y^0}\right)\Big|_{\tau_0\to+\infty} \to 0. \tag{3.156}$$

现在把矩阵 $\left(\dfrac{\partial x}{\partial x^0}\right)\Big|_{t=0}$ 与矩阵 (3.124) 进行比较, 并利用 (3.148)—(3.156) 我们找到

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x^0}\right)\Big|_{t=0} = \frac{\partial x_0(0,x^0)}{\partial x^0} + O(\mu). \tag{3.157}$$

类似地有

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x^0}\right)\Big|_{t=1} = \frac{\partial x_0(1,x^0)}{\partial x^0} + O(\mu). \tag{3.158}$$

于是所需要的关系式 (3.142) 现在就从 (3.143), (3.144) 和 R 对其向量值变量的连续性 (3.157) 以及 (3.158) 得出.

由条件 $\Delta_0(x_0^0) \neq 0$ 和 $R(x_0(0,x^0), x_0(1,x^0))$ 对 x^0 导数的连续性推出, $\Delta_0(x^0)$ 在以 x_0^0 为中心, 以 δ 为半径的某个球 S_δ 中不等于零:

$$\Delta_0(x^0) \neq 0 \quad \text{对}\, x^0 \in S_\delta. \tag{3.159}$$

于是从 (3.142) 推出, 对充分小的 μ_0, 当 $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$ 时有

$$\Delta(x^0, \mu) \neq 0 \quad \text{对}\, x^0 \in S_\delta. \tag{3.160}$$

考虑函数 $R(x_0(0,x^0), x_0(1,x^0))$, 从 (3.159) 推出, 在 R 的值空间中存在区域 ϖ 使得 $R = R(x_0(0,x^0), x_0(1,x^0))$ 在 S_δ 与 ω 的点之间实现了一一对应. 由于根据定义有

$$R(x_0(0,x_0^0), x_0(1,x_0^0)) = 0, \tag{3.161}$$

所以 x^0 变化空间中的点 x_0^0 对应于 R 值空间中的点 $R = 0$.

我们注意到 S_δ 和 ϖ 都与 μ 无关, 于是在 R 的值空间中存在一个以 $R = 0$ 为中心, 以 ε 为半径的球 S_ε 使得 $S_\varepsilon \subset \omega$.

现在考虑函数 $R(x_0(0,\mu,x^0), x_0(1,\mu,x^0))$. 根据 (3.144) 有

$$R(x(0,\mu,x^0), x(1,\mu,x^0)) = R(x_0(0,x^0), x_0(1,x^0)) + O(\mu), \tag{3.162}$$

且由 (3.160) 推出在 R 的值空间中存在区域 $\varpi(\mu)$ 使得

$$R = R(x_0(0,\mu,x^0), x_0(1,\mu,x^0))$$

在 S_δ 的点与 $\varpi(\mu)$ 的点之间实现一一对应; (3.162) 式说明 $\varpi(\mu)$ 的点相对于 ϖ 的点移动了一个不超过 $O(\mu)$ 的距离. 因此, 如果 μ 充分小, 则有 $S_\varepsilon \subset \varpi$; 特别, 点 $R = 0$ 位于 $\varpi(\mu)$ 中. 从而 S_δ 含有惟一使得 $R(x(0,\mu,X^0(\mu)), x(1,\mu,X^0(\mu))) = 0$ 的点 $X^0(\mu)$. 这就意味着对于 $x^* = X^0(\mu)$ 时 (3.62), (3.63) 的解 $X(t,\mu)$ 满足边界条件 (3.109). 亦即

$$R(X(0,\mu), X(1,\mu)) = 0.$$

我们现在来证明估计式 (3.141) 当 $n = 0$ 时, (3.141) 式就推出定理关于解 $X(t,\mu)$ 的存在性和惟一性结论. 关系式 (3.160) 和 $R(x(0,\mu,x^0),\ x(1,\mu,x^0))$ 对 x^0 连续导数的存在性推出 $R = R(x(0,\mu,x^0), x(1,\mu,x^0))$ 的反函数 $x^0 = x^0(R,\mu)$ 的存在性, 它在 $\omega(\mu)$ 上有定义, 关于 R 有连续导数, 且若 $R \in \varpi(\mu)$, 则有

$$\left\| \frac{\partial x^0(R,\mu)}{\partial R} \right\| \leqslant C. \tag{3.163}$$

考虑方程组 (3.62) 满足

$$az(0,\mu)+bz(1,\mu)=z_0^0,\qquad y(0,\mu)=y_0^0 \tag{3.164}$$

的解 $x(t,\mu,x_0^0)$. 根据 (3.161) 和 (3.162) 这个解满足

$$R(x(0,\mu,x_0^0),x(1,\mu,x_0^0))=R(x_0(0,x_0^0),x_0(1,x_0^0))+O(\mu)=O(\mu).$$

而且还有

$$R(x(0,\mu,X^0(\mu)),x(1,\mu,X^0(\mu)))=0.$$

于是利用 (3.163) 推出

$$\| X^0(\mu)-x_0^0 \|\leqslant C\mu. \tag{3.165}$$

我们从 $n=0$ 开始证明估计式 (3.141). 把问题 (3.62), (3.63) 满足 $x^*=X^0(\mu)$ 时的解 $X(t,\mu)$ 与满足 (3.164) 的解 $x(t,\mu,x_0^0)$ 进行比较. 由于 (3.145), (3.146) 的解 $\dfrac{\partial x(t,\mu,x^0)}{\partial x^0}$ 对 $x^0\in S_\delta, 0\leqslant t\leqslant 1, 0<\mu\leqslant\mu_0$ 是一致有界的, 因此从 (3.165) 即得

$$\| X(t,\mu)-x(t,\mu,x_0^0) \|\leqslant C\mu \tag{3.166}$$

对 $0\leqslant t\leqslant 1, 0<\mu\leqslant\mu_0$ 成立. 但是 $X_0(t,\mu)$ 是问题 (3.62), (3.164) 解的零次近似, 因此有

$$\| x(t,\mu,x_0^0)-X_0(t,\mu) \|\leqslant C\mu,\quad 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{3.167}$$

于是对于 $n=0$ 的关系式 (3.141) 从 (3.166) 和 (3.167) 式得出.

对于任意 n, 我们证明 (3.141) 进行如下. 我们用条件

$$(x^0)_n=x_0^0+\mu x_1^0+\cdots+\mu^n x_n^0$$

代替定解条件 (3.164) 中的向量 x_0^0, 其中 x_k^0 是由上面的算法所确定. 用 $(x^0)_n$ 代替 x_0^0 重复上面的推理, 我们看出 $X^0(\mu)$ 满足

$$\| X^0(\mu)-(x^0)_n \|\leqslant C\mu^{n+1}. \tag{3.168}$$

这是前面构造过程的结果：

$$R(x(0,\mu,(x^0)_n),x(1,\mu,(x^0)_n))=R_0+\mu R_1+\mu^2R_2+\cdots+\mu^nR_n+O(\mu^{n+1}).$$

关系式 (3.168) 和 $\dfrac{\partial x(t,\mu,x^0)}{\partial x^0}$ 对 $0\leqslant t\leqslant 1, 0<\mu\leqslant\mu_0$ 的一致有界性推出:

$$\| X(t,\mu)-x(t,\mu,(x^0)_n) \|\leqslant C\mu^{n+1}, \tag{3.169}$$

但是

$$\| x(t,\mu,(x^0)_n)-X_n(t,\mu) \|\leqslant C\mu^{n+1}. \tag{3.170}$$

因此对任意 n 的 (3.141) 式就从 (3.169), (3.170) 式得出. 这就完成了证明. □

第四章　无穷大解的初边值问题

4.1　数量情况时无穷大解的初值问题

讨论下面二阶方程初值问题 [1]

$$
\begin{cases}
\mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=A(y,t)z+B(y,t), & (4.1)\\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z, & (4.2)\\
y(0,\mu)=y^0,\quad z(0,\mu)=\dfrac{z_{-1}^0}{\mu}, & (4.3)
\end{cases}
$$

这里 $y,\ z\in\mathfrak{R}$, $\mu>0$ 是小参数, y^0, z_{-1}^0 是给定的初值.

如果二阶方程的右端关于一阶导数是线性的, 一般而言, 导数在初始点 $t=0$ 会产生无穷大初值. 这就是初值 (4.3) 这样给出的原因.

$[\mathrm{H}_{4.1}]$　假设 $A(y,t)$, $B(y,t)$ 在 $D=\{(y,t)|\,A<y<B,\ 0\leqslant t<T\}$ 上无限次可微.

4.1.1　渐近解的构造

构造问题 (4.1)—(4.3) 渐近展开式如下:

$$y(t,\mu)=\bar{y}(t,\mu)+\Pi y(\tau_0,\mu), \tag{4.4}$$

$$z(t,\mu)=\bar{z}(t,\mu)+\Pi z(\tau_0,\mu),\quad \tau_0=\frac{t}{\mu}, \tag{4.5}$$

函数 y 和 z 的正则级数具有相同形式 ($\bar{x}=(\bar{y}(t,\mu),\bar{z}(t,\mu))^{\mathrm{T}}$)

$$\bar{x}(t,\mu)=\bar{x}_0(t)+\mu\bar{x}_1(t)+\cdots+\mu^k\bar{x}_k(t)+\cdots. \tag{4.6}$$

但边界层级数 $\Pi y(\tau_0,\mu)$, $\Pi z(\tau_0,\mu)$ 是不一样的

$$\Pi y(\tau_0,\mu)=\Pi_0 y(\tau_0)+\mu\Pi_1 y(\tau_0)+\cdots+\mu^k\Pi_k y(\tau_0)+\cdots, \tag{4.7}$$

$$\Pi z(\tau_0,\mu)=\mu^{-1}\Pi_{-1}z(\tau_0)+\Pi_0 z(\tau_0)+\mu\Pi_1 z(\tau_0)+\cdots+\mu^k\Pi_k z(\tau_0)+\cdots. \tag{4.8}$$

确定渐近解正则级数主项的方程为

$$0=A(\bar y_0,t)\frac{\mathrm{d}\bar y_0}{\mathrm{d}t}+B(\bar y_0,t),\quad \frac{\mathrm{d}\bar y_0}{\mathrm{d}t}=\bar z_0, \tag{4.9}$$

其中初值 $\bar y_0(0)=y^*$ 待定. 因为 $\Pi_0 y(\tau_0)$ 一般不为零, 所以它是无穷大解所特有的性态.

求解边界层项 $\Pi_{-1}z(\tau_0)$, $\Pi_0 y(\tau_0)$ 的方程和初值为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\Pi_{-1}z}{\mathrm{d}\tau_0}=A(y^*+\Pi_0 y,0)\Pi_{-1}z, & (4.10)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\Pi_0 y}{\mathrm{d}\tau_0}=\Pi_{-1}z, & (4.11)\\[2mm] \Pi_{-1}z(0)=z_{-1}^0,\quad \Pi_0 y(0)=y^0-y^*. & (4.12)\end{cases}$$

暂时未知的 y^* 将由下面的条件确定

$$\Pi_{-1}z(\infty)=0,\quad \Pi_0 y(\infty)=0. \tag{4.13}$$

记 $\tilde z=\Pi_{-1}z(\tau_0)$, $\tilde y=\bar y_0(0)+\Pi_0 y(\tau_0)$, 则问题 (4.10)—(4.12) 化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde z}{\mathrm{d}\tilde y}=A(\tilde y,0), & (4.14)\\[2mm] \tilde z(0)=z_{-1}^0,\quad \tilde z(\infty)=0,\quad \tilde y(\infty)=y^0. & (4.15)\end{cases}$$

方程 (4.14) 是可分离变量型的, 积分后有

$$\tilde z(\tau_0)=\int_{y^*}^{\tilde y}A(y,0)\mathrm{d}y, \tag{4.16}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\tilde y}{\mathrm{d}\tau_0}=\int_{y^*}^{\tilde y}A(y,0)\,\mathrm{d}y. \tag{4.17}$$

易见 $\tilde y=y^*$ 是自治方程 (4.17) 的平衡点, 在此稳定性条件可这样提:

[$\mathrm{H}_{4.2}$] 假设 $A(y,t)<0$, $A<y<B$.

如果在 (4.16) 中令 $\tau_0=0$ 可得确定 y^* 的方程

$$z_{-1}^0=\int_{y^*}^{y^0}A(y,0)\mathrm{d}y. \tag{4.18}$$

因为 (4.18) 是非线性的, 所以要求它的解存在.

[H4.3] 假设方程 (4.18) 关于 y^* 可解, 并且 y^0 在平衡点 y^* 的影响域内.

[H4.4] 假设下面初值问题有解 $\bar{y}_0 = \bar{y}_0(t)$, $0 \leqslant t < T$,

$$A(\bar{y}_0, t)\frac{\mathrm{d}\bar{y}_0}{\mathrm{d}t} + B(\bar{y}_0, t) = 0, \quad \bar{y}_0(0) = y^*.$$

求出 $\bar{y}_0(t)$ 后, 就能确定

$$\bar{z}_0(t) = \frac{\mathrm{d}\bar{y}_0}{\mathrm{d}t}, \quad \Pi_0 y(\tau_0) = \tilde{y}(\tau_0) - y^*, \quad \Pi_{-1} z(\tau_0) = \tilde{z}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}\Pi_0 y}{\mathrm{d}\tau_0}.$$

这样渐近级数的零次项都能确定.

对 $k \geqslant 1$ 写出确定 $\bar{y}_k(t)$, $\bar{z}_k(t)$ 和 $\Pi_k y(\tau_0)$, $\Pi_k z(\tau_0)$ 的方程和边值

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{z}_{k-1}}{\mathrm{d}t} = A(\bar{y}_0, t)\bar{z}_k(t) + B(\bar{y}_0, t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_k}{\mathrm{d}t} = \bar{z}_k(t), \end{cases} \tag{4.19}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_{k-1} z}{\mathrm{d}\tau_0} = A(\tau_0)\Pi_{k-1} z + A_y(\tau_0)\Pi_{-1} z(\tau_0)(\bar{y}_k(0) + \Pi_k y) + \varphi_{k-1}(\tau_0), \\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_k y}{\mathrm{d}\tau_0} = \Pi_{k-1} z, \end{cases} \tag{4.20}$$

这里 $A(\tau_0)$, $A_y(\tau_0)$ 都是在 $(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau_0), 0)$ 点取值, $\varphi_{k-1}(\tau_0)$ 是已知的复合函数, 而 $\bar{y}_k(0)$ 待定. 类似于对 (4.10), (4.11) 的讨论, 先作变量替换

$$\tilde{y}_k(\tau_0) = \bar{y}_k(0) + \Pi_k y(\tau_0), \tag{4.21}$$

把方程组 (4.20) 变成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_{k-1} z}{\mathrm{d}\tau_0} = A(\tau_0)\Pi_{k-1} z + A_y(\tau_0)\Pi_{-1} z(\tau_0)\tilde{y}_k + \varphi_{k-1}(\tau_0), \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}_k}{\mathrm{d}\tau_0} = \Pi_{k-1} z, \end{cases} \tag{4.22}$$

并写出初值

$$\Pi_{k-1} z(0) = -\bar{z}_{k-1}(0), \quad \tilde{y}_k(0) = 0. \tag{4.23}$$

求出初值问题 (4.22), (4.23) 的解 $\Pi_{k-1} z(\tau_0)$, $\tilde{y}_k(\tau_0)$ 之后, 考虑到 $\Pi_k y(\infty) = \Pi_{k-1} z(\infty) = 0$, 从 (4.20) 积分后有

$$\Pi_k y(\tau_0) = -\int_{\tau_0}^{\infty} \Pi_{k-1} z(s)\mathrm{d}s. \tag{4.24}$$

关于边界层函数 $\Pi_k y(\tau_0)$, $\Pi_{k-1}z(\tau_0)$ 的指数衰减性将在后面再提. 可以认为广义积分 (4.24) 是收敛的. 把 (4.24) 代入 (4.21) 并令 $\tau_0 = 0$ 可求得 $\bar{y}_k(0)$, 即

$$\bar{y}_k(0) = \int_0^\infty \Pi_{k-1}z(s)\mathrm{d}s. \tag{4.25}$$

再从方程组 (4.19) 和初值 (4.25) 就能确定 $\bar{y}_k(t)$, $\bar{z}_k(t)$.

记 $X_n(t,\mu)$ 是渐近展开式 (4.4), (4.5) 前 n 项部分和, 我们有下面结论

定理 4.1 如果满足条件 $[\mathrm{H}_{4.1}]$—$[\mathrm{H}_{4.4}]$, 则存在常数 $\mu_0 > 0$, $C > 0$, 使得当 $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时, 问题 (4.1)—(4.3) 的解 $z(t,\mu)$, $y(t,\mu)$ 存在惟一, 且有下面不等式

$$|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)| \leqslant C\mu^{n+1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

注释 4.1 同样可以把条件 $[\mathrm{H}_{4.1}]$ 改成函数 $A(y,t)$, $B(y,t)$ 在曲线 L_0 的某个 δ 管子中对 y 和 t 有 $n+2$ 阶连续偏导数.

定理 4.1 的证明可参照定理 2.4 的证明步骤进行, 只是在细节上略有差别. 本问题在构造渐近展开式时所得到的边界层函数仍具有指数衰减的性质 ($k \geqslant 1$):

$$|\Pi_k x(\tau_0)| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa\tau_0}, \quad \tau_0 \geqslant 0. \tag{4.26}$$

4.2 方程组的无穷大初值问题

本节我们将讨论下面类型的方程组初值问题 [3]

$$\begin{cases} \mu z_1' = A_{11}(y_1,y_2,t)z_1 + A_{12}(y_1,y_2,t)z_2 + B_1(y_1,y_2,t), \\ y_1' = z_1, \\ \mu z_2' = A_{21}(y_1,y_2,t)z_1 + A_{22}(y_1,y_2,t)z_2 + B_2(y_1,y_2,t), \\ y_2' = z_2. & (4.27) \\ y_1(0,\mu) = y_1^0, \qquad z_1(0,\mu) = \dfrac{z_{1,-1}^0}{\mu}, \\ y_2(0,\mu) = y_2^0, \qquad z_2(0,\mu) = \dfrac{z_{2,-1}^0}{\mu}. & (4.28) \end{cases}$$

这是问题 (4.1)—(4.3) 当 $y, z \in \Re^2$ 时的情形. 对于 $y, z \in \Re^n$, 如果在 (4.1)—(4.3) 中令 $y = \tilde{y}, \mu z = \tilde{z}$, 则就得到一个等价的 $2n$ 阶临界情况初值问题 [86, 87].

4.2.1 渐近解的构造

问题 (4.27), (4.28) 的渐近表达式为

$$\begin{aligned} y_i &= \bar{y}_{i0}(t) + \mu\bar{y}_{i1}(t) + \cdots + \Pi_0 y_i(\tau) + \mu\Pi_1 y_i(\tau) + \cdots, \\ z_i &= \bar{z}_{i0}(t) + \mu\bar{z}_{i1}(t) + \cdots + \mu^{-1}\Pi_{-1}z_i(\tau) + \Pi_0 z_i(\tau) + \cdots, \end{aligned} \tag{4.29}$$

其中 $\tau=t/\mu$.

[$H_{4.5}$]　假设函数 $A_{ik}(y_1,y_2,t)$, $B_i(y_1,y_2,t)\,(i,k=1,2)$ 在 D 上有一阶连续偏导数, $D=\{0\leqslant t\leqslant 1,\ |y_i|<l, i=1,2\}$, 其中 l 是某个常数.

由边界层函数法可得

$$\begin{cases}A_{11}(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)\bar{z}_{10}+A_{12}(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)\bar{z}_{20}+B_1(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_{10}}{\mathrm{d}t}=\bar{z}_{10},\\ A_{21}(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)\bar{z}_{10}+A_{22}(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)\bar{z}_{20}+B_2(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_{20}}{\mathrm{d}t}=\bar{z}_{20}.\end{cases}\tag{4.30}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\Pi_{-1}z_1}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{A}_{11}\Pi_{-1}z_1+\tilde{A}_{12}\Pi_{-1}z_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_0y_1}{\mathrm{d}\tau}=\Pi_{-1}z_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_{-1}z_2}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{A}_{21}\Pi_{-1}z_1+\tilde{A}_{22}\Pi_{-1}z_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_0y_2}{\mathrm{d}\tau}=\Pi_{-1}z_2,\end{cases}\tag{4.31}$$

其中 $\tilde{A}_{ik}\,(i,k=1,2)$ 均表示函数 A_{ik} 在点 $(\bar{y}_{10}(0)+\Pi_0y_1,\bar{y}_{20}(0)+\Pi_0y_2,0)$ 处取值. 相应的初值为

$$\begin{cases}\bar{y}_{10}(0)+\Pi_0y_1(0)=y_1^0,\quad \Pi_{-1}z_1(0)=z_{1,-1}^0,\\ \bar{y}_{20}(0)+\Pi_0y_2(0)=y_2^0,\quad \Pi_{-1}z_2(0)=z_{2,-1}^0.\end{cases}\tag{4.32}$$

自然, 边界层函数 Π_0y_i, $\Pi_{-1}z_i\,(i=1,2)$ 满足在无穷远处衰减条件:

$$\begin{aligned}&\Pi_0y_1(\infty)=0,\qquad \Pi_{-1}z_1(\infty)=0,\\ &\Pi_0y_2(\infty)=0,\qquad \Pi_{-1}z_2(\infty)=0.\end{aligned}\tag{4.33}$$

记

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t) & A_{12}(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)\\ A_{21}(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t) & A_{22}(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)\end{pmatrix}.$$

[$H_{4.6}$]　假设在 D 内矩阵 $A_{2\times2}$ 的特征值满足: $\mathrm{Re}\lambda_i(t)<0\,(i=1,2)$.

[$H_{4.7}$]　假设下面全微分式子成立

$$\begin{aligned}A_{11}(y_1,y_2,0)\mathrm{d}y_1+A_{12}(y_1,y_2,0)\mathrm{d}y_2=\mathrm{d}M_1(y_1,y_2),\\ A_{21}(y_1,y_2,0)\mathrm{d}y_1+A_{22}(y_1,y_2,0)\mathrm{d}y_2=\mathrm{d}M_2(y_1,y_2).\end{aligned}$$

这里给出假设 [$H_{4.7}$] 仅涉及推导的方法, 而不涉及问题的本质.

由 [$H_{4.7}$], 在 (4.31) 中关于 τ 从 ∞ 到 τ_0 积分一次得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\Pi_0y_1}{\mathrm{d}\tau}=M_1(\bar{y}_{10}(0)+\Pi_0y_1,\bar{y}_{20}(0)+\Pi_0y_2)-M_1(\bar{y}_{10}(0),\bar{y}_{20}(0)),\\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_0y_2}{\mathrm{d}\tau}=M_2(\bar{y}_{10}(0)+\Pi_0y_1,\bar{y}_{20}(0)+\Pi_0y_2)-M_2(\bar{y}_{10}(0),\bar{y}_{20}(0)),\end{cases}\tag{4.34}$$

或者

$$\begin{cases} \Pi_{-1}z_1(\tau) = M_1(\bar{y}_{10}(0)+\Pi_0 y_1, \bar{y}_{20}(0)+\Pi_0 y_2) - M_1(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0)), \\ \Pi_{-1}z_2(\tau) = M_2(\bar{y}_{10}(0)+\Pi_0 y_1, \bar{y}_{20}(0)+\Pi_0 y_2) - M_2(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0)). \end{cases} \quad (4.35)$$

在 (4.35) 中令 $\tau=0$, 得到初值的关系式:

$$\begin{cases} z_{1,-1}^0 = M_1(y_1^0, y_2^0) - M_1(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0)), \\ z_{2,-1}^0 = M_2(y_1^0, y_2^0) - M_2(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0)). \end{cases} \quad (4.36)$$

[$\mathrm{H}_{4.8}$]　假设方程组 (4.36) 在 D 上有解 $\{\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0)\}$.
由 [$\mathrm{H}_{4.6}$] 从 (4.30) 可得确定 $\bar{y}_{i0}\,(i=1,2)$ 的方程

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}_{i0}}{\mathrm{d}t} = F_i(\bar{y}_{10}(t), \bar{y}_{20}(t), t), \quad i=1,2. \quad (4.37)$$

[$\mathrm{H}_{4.9}$]　假设方程组 (4.37) 和初值 $\bar{y}_{i0}(0)\,(i=1,2)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上有解 $\bar{y}_{i0}(t)$.
这样 $\{\bar{y}_{i0}(t), \bar{z}_{i0}(t)\}$ 就确定了. 再回到 (4.34) 和边值:

$$\Pi_0 y_i(0) = y_i^0 - \bar{y}_{i0}(0), \quad \Pi_0 y_i(\infty) = 0. \quad (4.38)$$

为了保证 $\Pi_0 y_i\,(i=1,2)$ 的存在需要给出下面条件

[$\mathrm{H}_{4.10}$]　假设在相平面 $(\Pi_0 y_1, \Pi_0 y_2)$ 上初值 $(y_1^0 - \bar{y}_{10}(0), y_2^0 - \bar{y}_{20}(0))$ 落在当 $\tau \to \infty$ 时进入平衡点 $(0,0)$ 的轨线上.

这样 $\Pi_0 y_i$ 和 $\Pi_{-1}z_i$ 就确定了, 并有指数估计

$$|\Pi_0 y_i(\tau_0)| = C\mathrm{e}^{-\kappa\tau}, \qquad |\Pi_{-1}z_i(\tau_0)| = C\mathrm{e}^{-\kappa\tau}, \quad (4.39)$$

其中 C 不依赖于 μ.

继续求 $\bar{y}_{i1}(t)$, $\bar{z}_{i1}(t)$, $\Pi_0 z_i$, $\Pi_1 y_i$, 它们满足下面方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{z}_{10}}{\mathrm{d}t} = & \bar{A}_{11}\bar{z}_{11} + \bar{A}_{12}\bar{z}_{21} + \bar{z}_{10}[(\bar{A}_{11})'_{y_1}\bar{y}_{11} + (\bar{A}_{11})'_{y_2}\bar{y}_{21}] \\ & +\bar{z}_{20}[(\bar{A}_{12})'_{y_1}\bar{y}_{11} + (\bar{A}_{12})'_{y_2}\bar{y}_{21}] + (\bar{B}_1)'_{y_1}\bar{y}_{11} + (\bar{B}_1)'_{y_2}\bar{y}_{21}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_{11}}{\mathrm{d}t} = & \bar{z}_{11}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{z}_{20}}{\mathrm{d}t} = & \bar{A}_{21}\bar{z}_{11} + \bar{A}_{22}\bar{z}_{21} + \bar{z}_{10}[(\bar{A}_{21})'_{y_1}\bar{y}_{11} + (\bar{A}_{21})'_{y_2}\bar{y}_{21}] \\ & +\bar{z}_{20}[(\bar{A}_{22})'_{y_1}\bar{y}_{11} + (\bar{A}_{22})'_{y_2}\bar{y}_{21}] + (\bar{B}_2)'_{y_1}\bar{y}_{11} + (\bar{B}_2)'_{y_2}\bar{y}_{21}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_{21}}{\mathrm{d}t} = & \bar{z}_{21}, \end{cases} \quad (4.40)$$

这里 $\bar{A}_{ik} = A_{ik}(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)$, $\bar{B}_i = B_i(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)\,(i,k=1,2)$.

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Pi_0 z_1}{\mathrm{d}\tau} &= \tilde{A}_{11}\Pi_0 z_1 + \tilde{A}_{12}\Pi_0 z_2 + \Pi_{-1}z_1[(\tilde{A}_{11})_{y_1}(\bar{y}_{11}(0)+\Pi_1 y_1) \\
&\quad +(\tilde{A}_{11})_{y_2}(\bar{y}_{21}(0)+\Pi_1 y_2)] + \Pi_{-1}z_2[(\tilde{A}_{12})_{y_1}(\bar{y}_{11}(0)+\Pi_1 y_1) \\
&\quad +(\tilde{A}_{12})_{y_2}(\bar{y}_{21}(0)+\Pi_1 y_2)] + \varphi_1, \\
\frac{\mathrm{d}\Pi_1 y_1}{\mathrm{d}\tau} &= \Pi_0 z_1, \\
\frac{\mathrm{d}\Pi_0 z_2}{\mathrm{d}\tau} &= \tilde{A}_{21}\Pi_0 z_1 + \tilde{A}_{22}\Pi_0 z_2 + \Pi_{-1}z_1[(\tilde{A}_{21})_{y_1}(\bar{y}_{11}(0)+\Pi_1 y_1) \\
&\quad +(\tilde{A}_{21})_{y_2}(\bar{y}_{21}(0)+\Pi_1 y_2)] + \Pi_{-1}z_2[(\tilde{A}_{22})'_{y_1}(\bar{y}_{11}(0)+\Pi_1 y_1) \\
&\quad +(\tilde{A}_{22})_{y_2}(\bar{y}_{21}(0)+\Pi_1 y_2)] + \varphi_2, \\
\frac{\mathrm{d}\Pi_1 y_2}{\mathrm{d}\tau} &= \Pi_0 z_2,
\end{aligned}\right. \tag{4.41}$$

其中

$$\tilde{A}_{ik} = A_{ik}(\bar{y}_{10}(0)+\Pi_0 y_1, \bar{y}_{20}(0)+\Pi_0 y_2, 0), \quad \tilde{B}_i = B(\bar{y}_{10}(0)+\Pi_0 y_1, \bar{y}_{20}(0)+\Pi_0 y_2, 0),$$

$$\begin{aligned}
\varphi_i = \tilde{B}_i - \bar{B}_i + \Pi_{-1}z_1[(\tilde{A}_{i1})_{y_1}\tau\bar{y}_{10}(0) + (\tilde{A}_{i1})_{y_2}\tau\bar{y}_{20}(0) + (\tilde{A}_{i1})_t\tau] \\
+\Pi_{-1}z_2[(\tilde{A}_{i2})_{y_1}\tau\bar{y}_{10}(0) + (\tilde{A}_{i2})_{y_2}\tau\bar{y}'_{20}(0) + (\tilde{A}_{i2})_t\tau].
\end{aligned} \tag{4.42}$$

请注意在 (4.41) 中 $\bar{y}_{i1}(0)\ (i=1,2)$ 是暂时未知的. 相应于方程组的初始条件为

$$\Pi_0 z_i(0) = -\bar{z}_{i1}(0), \qquad \Pi_1 y_i(0) = -\bar{y}_{i1}(0). \tag{4.43}$$

我们有下面等式

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tilde{A}_{i1}\Pi_1 y_1 + \tilde{A}_{i2}\Pi_1 y_2) &= \frac{\mathrm{d}\tilde{A}_{i1}}{\mathrm{d}\tau}\Pi_1 y_1 + \frac{\mathrm{d}\tilde{A}_{i2}}{\mathrm{d}\tau}\Pi_1 y_2 + \tilde{A}_{i1}\frac{\mathrm{d}\Pi_1 y_1}{\mathrm{d}\tau} + \tilde{A}_{i2}\frac{\mathrm{d}\Pi_1 y_2}{\mathrm{d}\tau} \\
&= \tilde{A}_{i1}\Pi_0 z_1 + \tilde{A}_{i2}\Pi_0 z_2 + \Pi_1 y_1[(\tilde{A}_{i1})_{y_1}\frac{\mathrm{d}\Pi_0 y_1}{\mathrm{d}\tau} + (\tilde{A}_{i1})_{y_2}\frac{\mathrm{d}\Pi_0 y_2}{\mathrm{d}\tau}] \\
&\quad +\Pi_1 y_2[(\tilde{A}_{i2})_{y_1}\frac{\mathrm{d}\Pi_0 y_1}{\mathrm{d}\tau} + (\tilde{A}_{i2})_{y_2}\frac{\mathrm{d}\Pi_0 y_2}{\mathrm{d}\tau}] \\
&= \tilde{A}_{i1}\Pi_0 z_1 + \tilde{A}_{i2}\Pi_0 z_2 + \Pi_1 y_1[(\tilde{A}_{i1})_{y_1}\Pi_{-1}z_1 + (\tilde{A}_{i1})_{y_2}\Pi_{-1}z_2] \\
&\quad +\Pi_1 y_2[(\tilde{A}_{i2})_{y_1}\Pi_{-1}z_1 + (\tilde{A}_{i2})_{y_2}\Pi_{-1}z_2] \\
&= \tilde{A}_{i1}\Pi_0 z_1 + \tilde{A}_{i2}\Pi_0 z_2 + \Pi_{-1}z_1[(\tilde{A}_{i1})_{y_1}\Pi_1 y_1 + (\tilde{A}_{i2})_{y_1}\Pi_1 y_2] \\
&\quad +\Pi_{-1}z_2[(\tilde{A}_{i1})_{y_2}\Pi_1 y_1 + (\tilde{A}_{i2})_{y_2}\Pi_1 y_2].
\end{aligned}$$

利用全微分的等价条件: $(\tilde{A}_{i2})_{y_1} = (\tilde{A}_{i1})_{y_2}$ 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tilde{A}_{i1}\Pi_1 y_1 + \tilde{A}_{i2}\Pi_1 y_2) = \tilde{A}_{i1}\Pi_0 z_1 + \tilde{A}_{i2}\Pi_0 z_2 + \Pi_{-1}z_1[(\tilde{A}_{i1})_{y_1}\Pi_1 y_1 + (\tilde{A}_{i1})_{y_2}\Pi_1 y_2] \\
+\Pi_{-1}z_2[(\tilde{A}_{i2})_{y_1}\Pi_1 y_1 + (\tilde{A}_{i2})_{y_2}\Pi_1 y_2].
\end{aligned} \tag{4.44}$$

因此可以把 (4.41) 中关于 $\Pi_0 z_i$ 的导数写成

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_0 z_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tilde{A}_{i1}\Pi_1 y_1 + \tilde{A}_{i2}\Pi_1 y_2) + \bar{y}_{11}(0)\frac{\mathrm{d}\tilde{A}_{i1}}{\mathrm{d}\tau} + \bar{y}_{21}(0)\frac{\mathrm{d}\tilde{A}_{i2}}{\mathrm{d}\tau} + \varphi_i. \tag{4.45}$$

在 (4.45) 两边对 τ 进行积分

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Pi_1 y_i}{\mathrm{d}\tau} =& \tilde{A}_{i1}\Pi_1 y_1 + \tilde{A}_{i2}\Pi_1 y_2 + \bar{y}_{11}(0)[\tilde{A}_{i1} - A_{i1}(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0)] \\ &+ \bar{y}_{21}(0)[\tilde{A}_{i2} - A_{i2}(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0)] + \int_\infty^\tau \psi_i(s)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{4.46}$$

在 (4.46) 中令 $\tau = 0$ 后把

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Pi_1 y_i}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = \Pi_0 z_i(0) = -\bar{z}_{i0}(0)$$

$$\Pi_1 y_1(0) = -\bar{y}_{11}(0), \quad \Pi_1 y_2(0) = -\bar{y}_{21}(0)$$

代入可得:

$$\begin{aligned}-\bar{z}_{i0}(0) =& \tilde{A}_{i1}|_{\tau=0}(-\bar{y}_{11}(0)) + \tilde{A}_{i2}|_{\tau=0}(-\bar{y}_{21}(0)) + \bar{y}_{11}(0)\tilde{A}_{i1}|_{\tau=0} - \bar{y}_{11}(0)A_{i1}(\bar{y}_{10}(0), \\ &\bar{y}_{20}(0), 0) + \bar{y}_{21}(0)\tilde{A}_{i2}|_{\tau=0} - \bar{y}_{21}(0)A_{i2}(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0) + \int_\infty^0 \psi_i(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

即

$$\bar{z}_{i0}(0) = \bar{y}_{11}(0)A_{i1}(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0) + \bar{y}_{21}(0)A_{i2}(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0) + \int_0^\infty \psi_i(s)\,\mathrm{d}s. \tag{4.47}$$

整理后有

$$A_{11}(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0)\bar{y}_{11}(0) + A_{12}(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0)\bar{y}_{21}(0) = \bar{z}_{10}(0) - \int_0^\infty \psi_1(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$A_{21}(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0)\bar{y}_{11}(0) + A_{22}(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0)\bar{y}_{21}(0) = \bar{z}_{20}(0) - \int_0^\infty \psi_2(s)\,\mathrm{d}s.$$

这是关于 $\bar{y}_{i1}(0)(i = 1, 2)$ 的线性方程组, 因为其系数矩阵行列式不等于零, 可求出 $\bar{y}_{i1}(0)$. 随后由 (4.40) 可求出 $\bar{y}_{i1}(t)$, 紧接着 $\bar{z}_{i1}(t)$ 相应确定. 进而从 (4.46),(4.43) 组成的初值问题可求出 $\Pi_1 y_i(\tau)$, 再利用关系式 $\frac{\mathrm{d}\Pi_1 y_i}{\mathrm{d}\tau} = \Pi_0 z_i$ 确定 $\Pi_0 z_i(\tau)$. 继续上面的做法, 可逐次求出以后各项. 为了说明问题, 在此我们仅求出渐近解的前两项就够了.

4.2.2 解的存在性和渐近解的余项估计

定理 4.2 如果满足条件 $[\mathrm{H}_{4.5}]$—$[\mathrm{H}_{4.10}]$, 则存在常数 $\mu_0 > 0$, $C > 0$, 使得当 $0 < \mu < \mu_0$ 时, 问题 (4.27), (4.28) 的解存在, 并有余项估计

$$\begin{aligned}&|y_i(t, \mu) - (\bar{y}_{i0} + \Pi_0 y_i(\tau))| \leqslant C\mu, \quad i = 1, 2, \\ &|z_i(t, \mu) - (\bar{z}_{i0} + \mu^{-1}\Pi_{-1} z_i(\tau) + \Pi_0 z_i(\tau))| \leqslant C\mu.\end{aligned} \tag{4.48}$$

证明 我们引进下面的差 (这里和往下 $i=1,2$):

$$\begin{cases} v_i = y_i(t,\mu) - [\bar{y}_{i0}(t) + \Pi_0 y_i(\tau) + \mu\bar{y}_{i1}(t) + \mu\Pi_1 y_i(\tau)] = y_i - \tilde{Y}_{i1}, \\ u_i = z_i(t,\mu) - [\bar{z}_{i0}(t) + \mu^{-1}\Pi_{-1} z_i(\tau) + \Pi_0 z_i(\tau)] = z_i - Z_{i0}. \end{cases} \tag{4.49}$$

计算可得

$$\mu\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + [(A_{i1})_{y_1}v_1 + (A_{i2})_{y_2}v_2]Z_{10} + [(A_{i2})_{y_1}v_1 + (A_{i2})_{y_2}v_2]Z_{20} + (B_i)_{y_1}v_1 + (B_i)_{y_2}v_2 + G_i, \tag{4.50}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = u_i, \tag{4.51}$$

其中 $(A_{i1})_{y_1} = A_{i1}(\tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{21}, t)_{y_1}$, G_i 有下面两条性质:

1) $G_i(u_1,u_2,v_1,v_2,t,\mu) = O(\mu)$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$;

2) 任给 $\mu > 0$, 总可以找到 $\delta_0 > 0$ 和 $\mu_0 > 0$, 使得当 $\| u_i \| \leqslant \delta_0$, $\| v_i \| \leqslant \delta_0$, $\| \hat{u}_i \| \leqslant \delta_0$, $\| \hat{v}_i \| \leqslant \delta_0$, $0 < \mu < \mu_0$ 时, 有

$$|G_i(u_1,u_2,v_1,v_2,t,\mu) - G_i(\hat{u_1},\hat{u_2},\hat{v_1},\hat{v_2},t,\mu)| \leqslant \mu[\| u - \hat{u} \| + (1 + \frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-\frac{\kappa t}{\mu}}) \| v - \hat{v} \|].$$

这样 (4.50), (4.51) 加上初值:

$$u_i(0,\mu) = 0, \qquad v_i(0,\mu) = 0$$

构成方程组的初值问题. 往下的讨论类似于数量情况.

从 (4.51) 可得

$$v_i(t,\mu) = \int_0^t u_i \,\mathrm{d}s. \tag{4.52}$$

把它代入 (4.50)

$$\begin{aligned} \mu\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} &= A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + [(A_{i1})_{y_1}\int_0^t u_1\,\mathrm{d}s + (A_{i2})_{y_2}\int_0^t u_2\,\mathrm{d}s]Z_{10} \\ &\quad + [(A_{i2})_{y_1}\int_0^t u_1\,\mathrm{d}s + (A_{i2})_{y_2}\int_0^t u_2\,\mathrm{d}s]Z_{20} + (B_i)_{y_1}\int_0^t u_1\,\mathrm{d}s \\ &\quad + (B_i)_{y_2}\int_0^t u_2\,\mathrm{d}s + G_i \\ &= A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + P_{i1}\int_0^t u_1\,\mathrm{d}s + P_{i2}\int_0^t u_2\,\mathrm{d}s + G_i, \end{aligned} \tag{4.53}$$

把 (4.53) 写成等价的积分方程

$$u(t,\mu) = \int_0^t \frac{1}{\mu}W(t,s,\mu)[P(s,\mu)\int_0^s u\,\mathrm{d}q + G]\,\mathrm{d}s, \tag{4.54}$$

其中 W 是线性方程 $\mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=Au$ 的基本解矩阵, $P(s,\mu)$ 是已知矩阵, 而 $G=(G_1,G_2)^{\mathrm{T}}$.

再把 (4.54) 写成下面形式

$$u(t,\mu)=\int_0^t K(t,q,\mu)u(q,\mu)\,\mathrm{d}q+S(u,t,\mu), \tag{4.55}$$

其中 $K(t,q,\mu)$ 是矩阵核:

$$K(t,q,\mu)=\int_q^t \frac{1}{\mu}W(t,s,\mu)P(s,\mu)\,\mathrm{d}s,$$

它有下面估计

$$\| K(t,q,\mu) \|\leqslant C(1+\frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-\frac{\kappa t}{\mu}}),\quad 0\leqslant q\leqslant t\leqslant 1, \tag{4.56}$$

而 S 具有与 Q 相同的两个性质.

利用核 K 的预解式 R, 得到的下面表达式

$$u(t,\mu)=S(u,t,\mu)+\int_0^t R(t,s,\mu)S(u,s,\mu)\,\mathrm{d}s=J(u,t,\mu), \tag{4.57}$$

预解式 R 具有与 K 同样的估计 (4.56), 并且算子 J 具有与 Q 和 S 相同性质.

最后对 (4.57) 采用逐次逼近法, 可证明方程 (4.57) 解的存在和估计 $\| u \|\leqslant C\mu$, $\| v \|\leqslant C\mu$. 由此不但推出解 y_i,z_i 的存在性, 并且给出了余项估计式 (4.48). □

4.3 方程组的无穷大边值问题

4.3.1 单边界层边值问题

我们将讨论同样的方程组 (4.27), 但给出下面边值

$$\begin{aligned} &y_1(0,\mu)=y_1^0,\quad y_1(1,\mu)=y_1^1,\\ &y_2(0,\mu)=y_2^0,\quad y_2(1,\mu)=y_2^1. \end{aligned} \tag{4.58}$$

在此假设满足条件 $[\mathrm{H}_{4.5}]$—$[\mathrm{H}_{4.10}]$. 可以用解决初值问题的方法来讨论 (4.27), (4.58). 把初值 (4.28) 中的 $z_{1,-1}^0,z_{2,-1}^0$ 考虑成参数, 它们可这样选取使得 (4.27), (4.28) 的解就是 (4.27), (4.58) 的解.

根据上节的结果

$$\begin{aligned} &y_i(t,\mu)=\bar{y}_{i0}(t)+\Pi_0 y_i(\tau)+O(\mu),\quad i=1,2,\\ &z_i(t,\mu)=\bar{z}_{i0}(t)+\mu^{-1}\Pi_{-1}z_i(\tau)+\Pi_0 z_i(\tau)+O(\mu). \end{aligned}$$

特别在 $t=1$ 时,

$$y_i(1,\mu)=\bar{y}_{i0}(1)+O(\mu). \tag{4.59}$$

从关系式 (4.36) 看出 $\bar{y}_{i0}(0)$ 依赖于 $z_{i,-1}^0$, 但从 (4.30) 可知 $\bar{y}_{i0}(t)$ 依赖于 $\bar{y}_{i0}(0)$, 所以 $\bar{y}_{i0}(1)$ 依赖于 $z_{i,-1}^0$. 重写 (4.59)

$$y_i(1,\mu) = \bar{y}_{i0}(1, z_{1,-1}^0, z_{2,-1}^0) + O(\mu). \tag{4.60}$$

我们将这样选择 $z_{i,-1}^0$, 使得

$$y_i(1,\mu) = y_i^1. \tag{4.61}$$

从 (4.60), (4.61) 可得

$$\bar{y}_{i0}(1, z_{1,-1}^0, z_{2,-1}^0) + O(\mu) = y_i^1.$$

令 $\mu = 0$, 化成方程

$$\bar{y}_{i0}(1, z_{1,-1}^0, z_{2,-1}^0) = y_i^1. \tag{4.62}$$

假设 (4.62) 关于 $z_{i,-1}^0$ 可解, 并且

$$\frac{D(\bar{y}_{10}(1, z_{1,-1}^0, z_{2,-1}^0), \bar{y}_{20}(1, z_{1,-1}^0, z_{2,-1}^0))}{D(z_{1,-1}^0, z_{2,-1}^0)} \neq 0. \tag{4.63}$$

由此可得, 在 $(z_{1,-1}^0, z_{2,-1}^0)$ 的 μ 邻域存在点 $(z_{1,-1}^*, z_{2,-1}^*)$, 使得 (4.27), (4.28) 的解当 $z_{i,-1}^0 = z_{i,-1}^*$ 时满足 (4.58). 可以看出 $z_{i,-1}^0$ 是 $z_{i,-1}^*$ 的主要项, 并满足 (4.62). $z_{i,-1}^*$ 的高阶近似可以在构造 (4.27), (4.28) 的高阶渐近解时得到.

往下证明行列式 (4.63) 非零. 具体写出 (4.62) 和 (4.63)

$$\begin{cases} \bar{y}_{10}(1, z_{1,-1}^0, z_{2,-1}^0) = y_1^1, \\ \bar{y}_{20}(1, z_{1,-1}^0, z_{2,-1}^0) = y_2^1. \end{cases}$$

$$\frac{D(\bar{y}_{10}, \bar{y}_{20})}{D(z_{1,-1}^0, z_{2,-1}^0)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \bar{y}_{10}(1)}{\partial z_{1,-1}^0} & \dfrac{\partial \bar{y}_{10}(1)}{\partial z_{2,-1}^0} \\ \dfrac{\partial \bar{y}_{20}(1)}{\partial z_{1,-1}^0} & \dfrac{\partial \bar{y}_{20}(1)}{\partial z_{2,-1}^0} \end{vmatrix}.$$

记

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{y}_{10}(1)}{\partial \bar{y}_{10}(0)} & \dfrac{\partial \bar{y}_{10}(1)}{\partial \bar{y}_{20}(0)} \\ \dfrac{\partial \bar{y}_{20}(1)}{\partial \bar{y}_{10}(0)} & \dfrac{\partial \bar{y}_{20}(1)}{\partial \bar{y}_{20}(0)} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{y}_{10}(0)}{\partial z_{1,-1}^0} & \dfrac{\partial \bar{y}_{10}(0)}{\partial z_{2,-1}^0} \\ \dfrac{\partial \bar{y}_{20}(0)}{\partial z_{1,-1}^0} & \dfrac{\partial \bar{y}_{20}(0)}{\partial z_{2,-1}^0} \end{pmatrix}.$$

考虑到

$$\frac{\partial \bar{y}_{i0}(1)}{\partial z_{k,-1}^0} = \frac{\partial \bar{y}_{i0}(1)}{\partial \bar{y}_{10}(0)} \frac{\partial \bar{y}_{10}(0)}{\partial z_{k,-1}^0} + \frac{\partial \bar{y}_{i0}(1)}{\partial \bar{y}_{20}(0)} \frac{\partial \bar{y}_{20}(0)}{\partial z_{k,-1}^0},$$

有关系式

$$\frac{D(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20})}{D(z_{1,-1}^0,z_{2,-1}^0)}=|A||B|,$$

这里 $|A|$ 与 (4.30) 有关. 根据方程组解的存在惟一性定理可知 $|A|\neq 0$. 而 $B=(C)^{-1}$, 其中

$$C=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z_{1,-1}^0}{\partial\bar{y}_{10}(0)} & \dfrac{\partial z_{1,-1}^0}{\partial\bar{y}_{20}(0)}\\ \dfrac{\partial z_{2,-1}^0}{\partial\bar{y}_{10}(0)} & \dfrac{\partial z_{2,-1}^0}{\partial\bar{y}_{20}(0)}\end{pmatrix}.$$

但是, C 又能写成

$$C=-\begin{pmatrix}(\bar{M}_1)_{y_1} & (\bar{M}_1)_{y_2}\\ (\bar{M}_2)_{y_1} & (\bar{M}_2)_{y_2}\end{pmatrix},\qquad |C|=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以 $|B|=|C|^{-1}\neq 0$.

这样从 (4.62) 的可解性就推得了 (4.27), (4.58) 边值问题解的存在性.

注释 4.2 我们是在求出终值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_{i0}}{\mathrm{d}t}=F_i(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t),\\ \bar{y}_{i0}(1)=y_i^1\end{cases}$$

的解 $\bar{y}_{i0}(t)$ 之后再求 $\Pi_0 y_i(\tau)$ 的.

4.3.2 双边界层边值问题

我们仍讨论方程组 (4.27) 和边值条件 (4.58). 下面只给出渐近解的构造, 不给出定理的证明. 条件 $[\mathrm{H}_{4.5}]$ 仍保留.

$[\mathrm{H}_{4.11}]$ 假设在 D 上 $A_{2\times 2}$ 的特征值满足 $\mathrm{Re}\lambda_1(t)<0, \mathrm{Re}\lambda_2(t)>0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$.

在条件 $[\mathrm{H}_{4.11}]$ 之下所提边值问题在区间两端 $t=0$, $t=1$ 都会产生边界层. 因此, 我们构造下面形式的渐近展开式

$$\begin{aligned}y_i(t,\mu)&=\bar{y}_{i0}+\mu\bar{y}_{i1}+\cdots+\Pi_0 y_i(\tau_0)+\mu\Pi_1 y_i(\tau_0)\\&\quad+\cdots+R_0 y_i(\tau_1)+\mu R_1 y_i(\tau_1)+\cdots,\\ z_i(t,\mu)&=\bar{z}_{i0}+\mu\bar{z}_{i1}+\cdots+\mu^{-1}\Pi_{-1}z_i(\tau_0)+\Pi_0 z_i(\tau_0)\\&\quad+\cdots+\mu^{-1}R_{-1}z_i(\tau_1)+R_0 z_i(\tau_1)+\cdots,\end{aligned}\tag{4.64}$$

其中 $\tau_0=t/\mu$, $\tau_1=(t-1)/\mu$.

我们将用边界层函数法求到渐近展开式的一次近似. 求高次近似的方法是完全类似的, 在此不再进行讨论.

确定正则项系数和左边界函数的方程类似于 (4.30)(或 (4.37)), (4.31)(或 (4.34)), (4.40), (4.41). 而需要的边值条件为

$$\bar{y}_{i0}(0) + \Pi_0 y_i(0) = y_i^0, \quad \Pi_0 y_i(\infty) = 0, \tag{4.65}$$

$$\bar{y}_{i0}(1) + R_0 y_i(0) = y_i^1, \quad R_0 y_i(-\infty) = 0. \tag{4.66}$$

把 (4.36) 重新写成

$$z_{i,-1}^0 = M_i(y_1^0, y_2^0, 0) - M_i(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0), \tag{4.67}$$

请注意在 (4.67) 中 $\bar{y}_{i0}(0)$, $z_{i,-1}^0$ 都是未知的, 所以仅从方程组 (4.67) 无法求得 $\bar{y}_{i0}(0)$, 这也是和上小节的重要区别之一. 必须另想办法求 $\bar{y}_{i0}(0)$.

重写 (4.34)

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}_i}{\mathrm{d}\tau_0} = M_i(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0) - M_i(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0), \tag{4.68}$$

其中, $\tilde{y}_i = \bar{y}_{i0}(0) + \Pi_0 y_i(\tau_0)$.

根据 $[\mathrm{H}_{4.11}]$, 可知平衡点 $(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0))$ 是鞍点.

$[\mathrm{H}_{4.12}]$ 假设在相平面 $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ 上, 初值 (y_1^0, y_2^0) 落在当 $\tau_0 \to \infty$ 时进入鞍点 $(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0))$ 的分界轨线上.

条件 $[\mathrm{H}_{4.12}]$ 说明方程组 (4.68) 满足边值 (4.65) 的解存在, 且有指数估计

$$|\Pi_0 y_i(\tau_0)| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa_0 \tau_0}, \quad \tau_0 \geqslant 0. \tag{4.69}$$

通过选取积分因子, 总能把 (4.68) 的分界轨道表示出来

$$\begin{aligned}&[M_1(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0) - M_1(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0)]\mathrm{d}\tilde{y}_2 - [M_2(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0)\\ &-M_2(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0)]\mathrm{d}\tilde{y}_1 = \mathrm{d}\Phi(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0) = 0,\end{aligned} \tag{4.70}$$

即

$$\Phi(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0) - \Phi(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0) = 0. \tag{4.71}$$

积分流形 (4.71) 包括了经过鞍点 $(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0))$ 的所有轨线. 对于左边界层函数 Πy, 我们感兴趣的只是当 $\tau_0 \to \infty$ 时趋向于鞍点的分界轨线. 当 $A_{11} = -A_{22}$ 时, 即 (4.70) 左端是全微分时, 在鞍点的小邻域可写出分界轨道的表示式. 可这样做: 记

$$\Delta y_1 = \tilde{y}_1 - \bar{y}_{10}(0), \quad \Delta y_2 = \tilde{y}_2 - \bar{y}_{20}(0).$$

把函数 $\Phi(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0)$ 在点 $(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0))$ 做泰勒展开

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0) = {}& \Phi(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0) + \Phi_{\tilde{y}_1}(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0)\Delta y_1 + \Phi_{\tilde{y}_2}(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0)\Delta y_2\\ &+\frac{1}{2!}[\Phi_{y_1^2}(\bar{y}_{10}(0) + \theta\Delta y_1, \bar{y}_{20}(0) + \theta\Delta y_2, 0)(\Delta y_1)^2\\ &+2\Phi_{y_1 y_2}(\cdot)\Delta y_1 \Delta y_2 + \Phi_{y_2^2}(\cdot)(\Delta y_2)^2], \quad 0 < \theta < 1.\end{aligned} \tag{4.72}$$

把 (4.72) 代入 (4.71) 并考虑到 $\Phi_{\bar{y}_i}(\bar{y}_{10}(0),\bar{y}_{20}(0),0)=0\,(i=1,2)$, 得到分界轨道的下面表达式

$$\bar{A}_{21}(\Delta y_2)^2+2\bar{A}_{22}\Delta y_1\Delta y_2-\bar{A}_{12}(\Delta y_1)^2=0, \tag{4.73}$$

其中 $\bar{A}_{12}=\Phi_{y_2^2}(\cdot)$, $\bar{A}_{22}=-\Phi_{y_1y_2}(\cdot)$, $\bar{A}_{21}=\Phi_{y_1}(\cdot)$.

从 (4.73) 解出

$$\bar{A}_{21}\Delta y_2=(-\bar{A}_{22}\pm\sqrt{\bar{A}_{22}^2+\bar{A}_{12}\bar{A}_{22}})\Delta y_1. \tag{4.74}$$

注释 4.3 遗憾的是对一般方程很难给出轨道的解析表达式, 其中包括分界轨道.

注释 4.4 考虑到 $\lim\limits_{\tau_0\to\infty}\bar{A}_{ik}=A_{ik}$, 所以存在 $\bar{\tau}_0>0$, 当 $\tau_0\geqslant\bar{\tau}_0$ 时, $\bar{A}_{ik}$ 与 A_{ik} 有相同的符号.

我们把当 $\tau_0\to+\infty$ 时趋向于鞍点的分界线轨道记为

$$\Phi^{(+)}(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,0)-\Phi^{(+)}(\bar{y}_{10}(0),\bar{y}_{20}(0),0)=0. \tag{4.75}$$

在 (4.75) 中令 $\tau_0=0$ 有下面等式

$$\Phi^{(+)}(y_1^0,y_2^0,0)-\Phi^{(+)}(\bar{y}_{10}(0),\bar{y}_{20}(0),0)=0. \tag{4.76}$$

这样, 我们得到了与 $\bar{y}_{10}(0)$, $\bar{y}_{20}(0)$ 有关的等式, 但暂时无法确定 $\bar{y}_{10}(0)$, $\bar{y}_{20}(0)$.

对右边界层函数 $R_0y_i(\tau_1)$ 也有类似于 (4.68) 的方程

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}_i}{\mathrm{d}\tau_1}=M_i(\hat{y}_1,\hat{y}_2,1)-M_i(\bar{y}_{10}(1),\bar{y}_{20}(1),1) \tag{4.77}$$

和边值

$$\hat{y}_i(0)=y_i^1,\quad \hat{y}_i(-\infty)=\bar{y}_{i0}(1),$$

这里 $\hat{y}_i=\bar{y}_{i0}(1)+R_0y_i(\tau_1)$.

[$\mathrm{H}_{4.13}$] 假设在相平面 $(\hat{y}_1,\hat{y}_2)$ 上, 初值 (y_1^1,y_2^1) 落在当 $\tau_1\to-\infty$ 时进入鞍点 $(\bar{y}_{10}(1),\bar{y}_{20}(1))$ 的分界轨线上.

条件 [$\mathrm{H}_{4.13}$] 也保证了 $R_0y_i(\tau_1)$ 的存在, 并能得到指数估计式

$$|R_0y_i(\tau_1)|\leqslant C\mathrm{e}^{\kappa_1\tau_1},\quad \tau_1\leqslant 0.$$

类似于上面 (4.70)—(4.76) 的讨论可得当 $\tau_1\to-\infty$ 时趋向鞍点的分界线轨道

$$\Phi^{(-)}(\hat{y}_1,\hat{y}_2,1)-\Phi^{(-)}(\bar{y}_{10}(1),\bar{y}_{20}(1),1)=0. \tag{4.78}$$

以及关系式

$$\Phi^{(-)}(y_1^1, y_2^1, 1) - \Phi^{(-)}(\bar{y}_{10}(1), \bar{y}_{20}(1), 1) = 0. \tag{4.79}$$

如果注意到 $\bar{y}_{i0}(1)$ 可以通过 (4.37) 由 $\bar{y}_{i0}(0)$ 来表示, 则联立 (4.76), (4.79) 可找到 $\bar{y}_{10}(0)$, $\bar{y}_{20}(0)$.

[$\mathrm{H}_{4.14}$] 假设方程组 (4.76), (4.79) 关于 $\bar{y}_{10}(0)$, $\bar{y}_{20}(0)$ 有解, 并且下面行列式不为零

$$\frac{\partial(\Phi^{(+)}, \Phi^{(-)})}{\partial(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0))} \neq 0. \tag{4.80}$$

得到 $\bar{y}_{i0}(0)$ 后就可求出 (4.37) 的解 $\bar{y}_{i0}(t)$, 随后从 (4.68), (4.77) 求出 $\tilde{y}_i(\tau_0)$ 和 $\hat{y}_i(\tau_1)$. 再从

$$\Pi_0 y_i(\tau_0) = \tilde{y}_i(\tau_0) - \bar{y}_{i0}(0), \quad R_0 y_i(\tau_1) = \hat{y}_i(\tau_1) - \bar{y}_{i0}(1)$$

得到 $\Pi_0 y_i(\tau_0)$, $R_0 y_i(\tau_1)$. 而 $\Pi_{-1} z_i(\tau_0)$, $R_{-1} z_i(\tau_1)$ 是 $\Pi_0 y_i(\tau_0)$, $R_0 y_i(\tau_1)$ 的导数. 这样渐近展开式 (4.64) 的零次近似就得到了.

在本小节最后, 通过一个例子说明如果给出的方程组是线性的, 则分界线轨道很容易得到.

例 4.1 讨论下面方程组

$$\begin{cases} \mu y_1'' = y_2' + b_1, \\ \mu y_2'' = y_1' + b_2, \end{cases} \tag{4.81}$$

这里 b_1, b_2 是两个实数.

在 (4.81) 中令 $\mu = 0$, 得到退化方程组

$$\begin{cases} \bar{y}_2' = -b_1, \\ \bar{y}_1' = -b_2. \end{cases}$$

这时退化解为 $\bar{y}_1(t) = \bar{y}_1(0) - b_2 t$, $\bar{y}_2(t) = \bar{y}_2(0) - b_1 t$. 对应的 (4.70) 为

$$(\tilde{y}_2 - \bar{y}_{20}(0))\mathrm{d}\tilde{y}_2 - (\tilde{y}_1 - \bar{y}_{10}(0))\mathrm{d}\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{d}[(\tilde{y}_2 - \bar{y}_{20}(0))^2 - (\tilde{y}_1 - \bar{y}_{10}(0))^2] = 0,$$

可得

$$(\tilde{y}_2 - \bar{y}_{20}(0))^2 - (\tilde{y}_1 - \bar{y}_{10}(0))^2 = 0.$$

即 $\tilde{y}_2 - \bar{y}_{20}(0) = \pm(\tilde{y}_1 - \bar{y}_{10}(0))$.

考虑到 $\lambda_1 = -1$, 所以 $\tilde{y}_2 - \bar{y}_{20}(0) = -(\tilde{y}_1 - \bar{y}_{10}(0))$. 可得

$$\tilde{y}_2 + \tilde{y}_1 = \bar{y}_{20}(0) + \bar{y}_{10}(0).$$

在等式中令 $\tau_0 = 0$ 可得关系式

$$\bar{y}_{20}(0) + \bar{y}_{10}(0) = y_1^0 + y_2^0, \tag{4.82}$$

这里 $\Phi^{(+)}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0) = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$.

类似地做法可得 $\Phi^{(-)}(\hat{y}_1, \hat{y}_2, 1) = \hat{y}_1 - \hat{y}_2$. 另一关系式为

$$\bar{y}_{10}(1) - \bar{y}_{20}(1) = y_1^1 - y_2^1. \tag{4.83}$$

再由方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_{10}}{\mathrm{d}t} = \bar{z}_{10} = -b_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_{20}}{\mathrm{d}t} = \bar{z}_{20} = -b_1, \end{cases}$$

得到 $\bar{y}_{10}(t) = -b_2 t + C_1$, $\bar{y}_{20}(t) = -b_1 t + C_2$. 这样

$$\bar{y}_{10}(0) = \bar{y}_{20}(0) = C_1, \quad \bar{y}_{10}(1) = C_1 - b_2, \quad \bar{y}_{20}(1) = C_2 - b_1.$$

把方程组 (4.82), (4.83) 重新写成

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_1^0 + y_2^0, \\ C_1 - C_2 = y_1^1 - y_2^1 + b_2 - b_1. \end{cases} \tag{4.84}$$

求解线性方程组 (4.84)

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}(y_1^0 + y_2^0 + y_1^1 - y_2^1 + b_2 - b_1), \\ C_2 = \dfrac{1}{2}(y_1^0 + y_2^0 - y_1^1 + y_2^1 - b_2 + b_1). \end{cases}$$

由此得到了 $\{\bar{y}_{10}(t), \bar{y}_{20}(t)\}$:

$$\begin{cases} \bar{y}_{10}(t) = -b_2 t + \dfrac{1}{2}(y_1^0 + y_2^0 + y_1^1 - y_2^1 + b_2 - b_1), \\ \bar{y}_{20}(t) = -b_1 t + \dfrac{1}{2}(y_1^0 + y_2^0 - y_1^1 + y_2^1 - b_2 + b_1). \end{cases}$$

再从方程组 (4.68)

$$\begin{cases} \tilde{y}_1' = \tilde{y}_2 - C_2, \\ \tilde{y}_2' = \tilde{y}_1 - C_1, \\ \tilde{y}_1(0) = y_1^0, \quad \tilde{y}_2(0) = y_2^0. \end{cases}$$

求出

$$\begin{cases} \tilde{y}_1(\tau_0) = C_1 + (y_1^0 - C_1)\mathrm{e}^{-\tau_0}, \\ \tilde{y}_2(\tau_0) = C_2 + (y_2^0 - C_2)\mathrm{e}^{-\tau_0}. \end{cases}$$

所以 $\Pi_0 y_i(\tau_0) = (y_i^0 - \bar{y}_{i0}(0))\mathrm{e}^{-\tau_0}\ (i = 1, 2)$.

同理可求出

$$R_0 y_1(\tau_1) = \bar{y}_{20}(1) - \bar{y}_{10} + (y_1^1 - \bar{y}_{20}(1))\mathrm{e}^{\tau_1}, \quad R_0 y_2(\tau_1) = \bar{y}_{10}(1) - \bar{y}_{20} + (y_2^1 - \bar{y}_{10}(1))\mathrm{e}^{\tau_1}.$$

只要对 $\Pi_0 y_i(\tau_0)$, $R_0 y_i(\tau_1)$ 求导就能得到

$$\Pi_{-1} z_1(\tau_0) = -(y_1^0 - \bar{y}_{10}(0))\mathrm{e}^{-\tau_0}, \quad \Pi_{-1} z_2(\tau_0) = -(y_2^0 - \bar{y}_{20}(0))\mathrm{e}^{-\tau_0}$$
$$R_{-1} z_1(\tau_1) = (y_1^1 - \bar{y}_{20}(1))\mathrm{e}^{\tau_1}, \quad R_{-1} z_2(\tau_1) = (y_2^1 - \bar{y}_{10}(1))\mathrm{e}^{\tau_1}.$$

到此为止, 我们构造出了本例渐近展开式的零次近似.

4.4 临界情况线性方程组的无穷大初值问题

本节将讨论下面方程组的初值问题 [4]

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = A(t)z + \mu f(y, t), & (4.85) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = z, & (4.86) \\ y(0, \mu) = y^0, \quad z(0, \mu) = \dfrac{z^{-1}}{\mu}, & (4.87) \end{cases}$$

这里 y, z 都是二维向量, $f(y, t)$ 是二维向量函数, $\mu > 0$ 是小参数, $A(t) = (A_{ij}(t))_{2\times 2}$ $(i, j = 1, 2)$. 并且 $\det A(t) = 0$. 为书写方便起见, 往下既用向量记法, 也用分量记法.

[$\mathrm{H}_{4.15}$] 假设 $A(t)$ 和 $f(y, t)$ 在 $D = \{(y, t) |\, \|y\| \leqslant M,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上具有 $n+2$ 阶连续偏导数, M 和 T 都是实数.

[$\mathrm{H}_{4.16}$] 假设在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上, $\det A(t) = 0$, 其中 $\lambda_1 \equiv 0$, $\lambda_2 < 0$.

根据边界层函数法 [1], 我们构造下面形式的渐近解

$$\begin{cases} y(t, \mu) = \bar{y}(t, \mu) + \Pi y(\tau, \mu), \\ z(t, \mu) = \bar{z}(t, \mu) + \Pi z(\tau, \mu), \quad \tau = \dfrac{t}{\mu}, \end{cases} \tag{4.88}$$

其中

$$\bar{y}(t, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \bar{y}_i(t), \quad \bar{z}(t, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \bar{z}_i(t), \tag{4.89}$$

$$\Pi y(\tau, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \Pi_i y(\tau), \quad \Pi z(\tau, \mu) = \sum_{i=-1}^{\infty} \mu^i \Pi_i z(\tau). \tag{4.90}$$

级数 (4.89) 是正则级数, 而 (4.90) 是仅在 $t = 0$ 的小邻域内起作用的边界层函数.

正则级数的零次项系数由下面方程组确定

$$\begin{cases} A(t)\bar{z}_0 = 0, & (4.91) \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_0}{\mathrm{d}t} = \bar{z}_0. & (4.92) \end{cases}$$

因为 $|A(t)| = 0$, 所以方程组 (4.91) 的解不惟一, 可写成

$$\bar{z}_0(t) = \mathrm{e}^1(t)\alpha(t) = \begin{pmatrix} e_1^1(t) \\ e_2^1(t) \end{pmatrix} \alpha(t), \tag{4.93}$$

其中 $\mathrm{e}^1(t)$ 是对应于 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量, $\alpha(t)$ 是未知函数. $\bar{y}_0(t)$ 和 $\alpha(t)$ 需要在求一次项系数时确定.

级数 (4.89) 一次项系数满足下面方程组

$$\frac{\mathrm{d}\bar{z}_0}{\mathrm{d}t} - f(\bar{y}_0, t) = A(t)\bar{z}_1, \tag{4.94}$$

代数方程组 (4.94) 的可解性条件为

$$\left\langle g^1(t), -f(\bar{y}_0, t) + \frac{\mathrm{d}\bar{z}_0}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 0, \tag{4.95}$$

这里 $\langle\ \ \rangle$ 表示数量积, $g^1(t)$ 是 A^{T} 中零特征值所对应的特征向量.

具体写出 (4.95)

$$(g_1^1 e_1^1 + g_2^1 e_2^1)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + g_1^1 \frac{\mathrm{d}e_1^1}{\mathrm{d}t} + g_2^1 \frac{\mathrm{d}e_2^1}{\mathrm{d}t}\alpha = g_1^1 f_1(\bar{y}_{10}, \bar{y}_{20}, t) + g_2^1 f_2(\bar{y}_{10}, \bar{y}_{20}, t).$$

考虑到 $\langle g^1, \mathrm{e}^1 \rangle \neq 0$, 所以该等式关于 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$ 可解:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \Phi(\alpha, \bar{y}_{10}, \bar{y}_{20}, t). \tag{4.96}$$

这样就得到了关于 $\alpha(t)$, $\bar{y}_0(t)$ 的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_{10}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}_1^1\alpha, \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_{20}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}_2^1\alpha, \\ \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \Phi(\alpha, \bar{y}_{10}, \bar{y}_{20}, t), \end{cases} \tag{4.97}$$

而定解条件需要在求出 $\Pi_{-1}z$, $\Pi_0 y$ 后得到. 为此写出确定 $\Pi_{-1}z$, $\Pi_0 y$ 的方程和边值

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_{-1}z}{\mathrm{d}\tau} = A(0)\Pi_{-1}z, \\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_0 y}{\mathrm{d}\tau} = \Pi_{-1}z, & (4.98) \\ \Pi_{-1}z(0) = z^{-1}, \quad \Pi_0 y(0) = y^0 - \bar{y}_0(0), \\ \Pi_{-1}z(\infty) = \Pi_0 y(\infty) = 0. & (4.99) \end{cases}$$

方程组 (4.98) 的通解为

$$\begin{cases} \Pi_{-1}z(\tau) = C_1\mathrm{e}^1(0) + C_2\mathrm{e}^2(0)\mathrm{e}^{\lambda_2(0)\tau}, \\ \Pi_0 y(\tau) = \lambda_2^{-1}(0)C_2\mathrm{e}^2(0)\mathrm{e}^{\lambda_2(0)\tau}, \end{cases} \tag{4.100}$$

这里 $\mathrm{e}^1(0)$ 是对应于 $\lambda_1 \equiv 0$ 的特征向量, $\mathrm{e}^2(0)$ 是对应于 $\lambda_2(0)$ 的特征向量. C_1, C_2 是任意常数.

考虑到 (4.99), 有 $C_1 = 0$. 因此

$$\begin{cases} \Pi_{-1}z(\tau) = C_2\mathrm{e}^2(0)\mathrm{e}^{\lambda_2(0)\tau}, \\ \Pi_0 y(\tau) = \lambda_2^{-1}(0)C_2\mathrm{e}^2(0)\mathrm{e}^{\lambda_2(0)\tau}. \end{cases} \tag{4.101}$$

显然, 它们都有指数估计式

$$\begin{cases} \|\Pi_{-1}z(\tau)\| \leqslant C\mathrm{e}^{\lambda_2(0)\tau}, \quad \tau \geqslant 0, \\ \|\Pi_0 y(\tau)\| \leqslant C\mathrm{e}^{\lambda_2(0)\tau}. \end{cases} \tag{4.102}$$

根据初值 (4.99), C_2 和 $\bar{y}_{10}(0)$, $\bar{y}_{20}(0)$ 满足下面方程

$$\begin{cases} C_2 e_1^2(0) = z_1^{-1}, \quad C_2 e_2^2(0) = z_2^{-1}, \\ \bar{y}_{10}(0) + \lambda_2^{-1}(0)e_1^2 C_2 = y_1^0, \\ \bar{y}_{20}(0) + \lambda_2^{-1}(0)e_2^2 C_2 = y_2^0. \end{cases} \tag{4.103}$$

可见一个变量 C_2 满足两个方程, 这就说明 z_1^{-1}, z_2^{-1} 必须满足相容性条件:

$$\frac{z_1^{-1}}{e_1^2(0)} - \frac{z_2^{-1}}{e_2^2(0)} = 0. \tag{4.104}$$

只有这样才能求出 $C_2 = \dfrac{z_1^{-1}}{e_1^2(0)} = \dfrac{z_2^{-1}}{e_2^2(0)}$. 由此从 (4.103) 可确定 $\bar{y}_0(0)$:

$$\begin{cases} \bar{y}_{10}(0) = -\lambda_2^{-1}(0)z_1^{-1} + \bar{y}_1^0, \\ \bar{y}_{20}(0) = -\lambda_2^{-1}(0)z_2^{-1} + \bar{y}_2^0. \end{cases} \tag{4.105}$$

为了得到 $\alpha(0)$, 需要写出关于 $\Pi_0 z$ 的问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_0 z}{\mathrm{d}\tau} = A(0)\Pi_0 z + A_t(0)\tau\Pi_{-1}z, & (4.106) \\ \Pi_0 z(0) = -\bar{z}_0(0), \quad \Pi_0 z(\infty) = 0. & (4.107) \end{cases}$$

方程 (4.106) 满足 $\Pi_0 z(\infty) = 0$ 的解为

$$\Pi_0 z(\tau) = \mathrm{d}_0\mathrm{e}^2(0)\mathrm{e}^{\lambda_2(0)\tau} + \tilde{\Pi}_0 z(\tau), \tag{4.108}$$

其中 d_0 是任意常数, $\tilde{\Pi}_0 z(\tau)$ 是 (4.106) 的一个特解, 并有 $\tilde{\Pi}_0 z(\infty) = 0$.

$$\tilde{\Pi}_0 z_i = \int_\infty^\tau A_t(0)\xi\Pi_{-1}z_i\mathrm{e}^{\lambda_2(0)(\tau-\xi)}\mathrm{d}\xi. \tag{4.109}$$

为了得到关于 $\tilde{\Pi}_0 z_i$ 的指数估计, 取充分小的 $\delta > 0$, 使得 $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2(0) + \delta < 0$. 这样

$$|\tilde{\Pi}_0 z_i| = |\int_{\infty}^{\tau} A_t(0)\xi z_i^{-1} e^{\lambda_2(0)\xi} e^{\lambda_2(0)(\tau-\xi)} d\xi|.$$

考虑到当 ξ 充分大时, 有 $\xi \leqslant e^{\lambda_2(0)\delta\xi}$, 所以

$$|\tilde{\Pi}_0 z_i| \leqslant C \int_{\infty}^{\tau} e^{(\lambda_2(0)+\delta)\xi} d\xi = C e^{(\lambda_2(0)+\delta)\tau} = C e^{\tilde{\lambda}_2(0)\tau}, \quad \tau \geqslant 0,$$

即 $\|\tilde{\Pi}_0 z\| \leqslant C e^{\tilde{\lambda}_2(0)\tau}$. 进而得到

$$\|\Pi_0 z(\tau)\| \leqslant C e^{\tilde{\lambda}_2(0)\tau}, \quad \tau \geqslant 0. \tag{4.110}$$

从初值条件 (4.107) 可得方程

$$e^1(0)\alpha(0) + d_0 e^2(0) + \tilde{\Pi}_0 z(0) = 0. \tag{4.111}$$

求解该方程可得 $\alpha(0) = \alpha^0$ 和 d_0. 到此为止, 对方程 (4.97) 有了初值 $\alpha(0) = \alpha^0$ 和 $\bar{y}_0(0)$.

[H$_{4.17}$]　假设在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上方程 (4.97) 和初值 $\alpha(0) = \alpha^0$, $\bar{y}_{10}(0) = y_1^0$, $\bar{y}_{20}(0) = y_2^0$ 有解.

这样就完全确定了正则项 $\bar{y}_0(t)$, $\bar{z}_0(t)$ 和边界层项 $\Pi_{-1}z(\tau)$, $\Pi_0 y(\tau)$.

重复上面过程, 可以确定渐近解的第 n 项系数. 例如到了第 n 步, $\bar{z}_n(t)$ 由下面方程确定

$$\frac{d\bar{z}_{n-1}}{dt} - F_{n-1} = A(t)\bar{z}_n, \quad \frac{d\bar{y}_n}{dt} = \bar{z}_n, \tag{4.112}$$

这里 F_{n-1} 是关于的 $\bar{y}_i (i = 0, \cdots, n-1)$ 的已知复合函数. 把 (4.112) 的解表示出来

$$\bar{z}_n(t) = e^1 \alpha_n(t) + \tilde{z}_n(t), \tag{4.113}$$

其中 $\alpha_n(t)$ 是暂时未知的函数, $\tilde{z}_n(t)$ 是 (4.112) 的一个特解. 从下一步的可解性条件可得确定 $\alpha_n(t)$ 的方程:

$$< g^1, -F_n + \frac{d^2\bar{y}_n}{dt^2} >= 0. \tag{4.114}$$

具体写出 (4.114)

$$(g_1^1 e_1^1 + g_2^1 e_2^1)\frac{d\alpha_n}{dt} + (g_1^1 \frac{de_1^1}{dt} + g_2^1 \frac{de_2^1}{dt})\alpha_n = g_1^1 F_{n,1} + g_2^1 F_{n,2}. \tag{4.115}$$

把 (4.112) 的第二个方程和 (4.115) 化成下面形式

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{y}_{1,n}}{dt} = e_1^1 \alpha_n + \tilde{z}_{1,n}, \\ \dfrac{d\bar{y}_{2,n}}{dt} = e_2^1 \alpha_n + \tilde{z}_{2,n}, \\ \dfrac{d\alpha_n}{dt} = \Phi(\alpha_n, \bar{y}_{1,n}, \bar{y}_{2,n}, t). \end{cases} \tag{4.116}$$

该方程组的初值 $\alpha_n(0)=\alpha_n^0$, $\bar{y}_n(0)$ 将在求出 $\Pi_n z$ 之后确定. 写出求 $\Pi_n z$ 的方程组及定解条件

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_n z}{\mathrm{d}\tau}=A(0)\Pi_n z+\varphi_{n-1(\tau)}, & (4.117)\\ \bar{z}_n(0)+\Pi_n z(0)=0, \quad \Pi_n z(\infty)=0, & (4.118)\end{cases}$$

这里 $\varphi_{n-1}(\tau)$ 是依赖于 $\Pi_i y(\tau)$, $\Pi_i z(\tau)(i=1,\cdots,n-1)$ 的已知复合函数. 求解 (4.117) 并考虑到 $\Pi_n z(\infty)=0$, 可得

$$\Pi_n z(\tau)=\mathrm{d}_n\mathrm{e}^2(0)\mathrm{e}^{\lambda_2(0)\tau}+\tilde{\Pi}_n z(\tau). \tag{4.119}$$

其中 d_n 是任意常数, $\tilde{\Pi}_n z(\tau)$ 是 (4.117) 的一个特解, 并且 $\|\tilde{\Pi}_n z(\tau)\|\leqslant C\mathrm{e}^{\kappa\tau}$, $\kappa<0$, $\tau\geqslant 0$.

在 (4.119) 中令 $\tau=0$, 并利用关系式 (4.113) 和 (4.118) 中第一个方程, 得到求 $\alpha_n(0)$, d_n 的方程组

$$\mathrm{e}^1(0)\alpha_n(0)+\tilde{z}_n(0)+\mathrm{d}_n\mathrm{e}^2(0)+\tilde{\Pi}_n z(0)=0. \tag{4.120}$$

从 (4.120) 中求出 $\alpha_n(0)$, d_n 后就能确定 $\Pi_n y$, $\Pi_{n-1}z$, 而且有下面指数估计:

$$\|\Pi_n y(\tau)\|\leqslant C\mathrm{e}^{\kappa\tau}, \quad \|\Pi_{n-1}z(\tau)\|\leqslant C\mathrm{e}^{\kappa\tau}, \quad \tau\geqslant 0.$$

我们把上面所得结果写成下面定理.

定理 4.3 如果满足条件 $[\mathrm{H}_{4.15}]$—$[\mathrm{H}_{4.17}]$, 那么存在常数 $\mu_0>0$, $C>0$, 使得当 $0\leqslant\mu\leqslant\mu_0$ 时, 初值问题 (4.85)—(4.87) 的解 $y(t,\mu)$, $z(t,\mu)$ 在 $0\leqslant t<T$ 上存在惟一, 而且满足下面不等式

$$\begin{cases} \|y(t,\mu)-Y_n(t,\mu)\|\leqslant C\mu^{n+1},\\ \|z(t,\mu)-Z_n(t,\mu)\|\leqslant C\mu^{n+1}. \end{cases} \tag{4.121}$$

证明 引进余项

$$\begin{cases} v(t,\mu)=y(t,\mu)-Y_{n+1}(t,\mu)-\mu^{n+2}\tilde{y}_{n+2}.\\ u(t,\mu)=z(t,\mu)-Z_n(t,\mu), \end{cases} \tag{4.122}$$

其中 Y_n, Z_n 是前 n 项部分和

$$\begin{cases} Y_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\mu^i(\bar{y}_i(t)+\Pi_i y(\tau)),\\ Z_n=\mu^{-1}\Pi_{-1}z(\tau)+\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\mu^i(\bar{z}_i(t)+\Pi_i z(\tau)),\\ \tilde{y}_{n+2}=\bar{y}_{n+2}(0)+\Pi_{n+2}y(\tau). \end{cases} \tag{4.123}$$

再令

$$H(t,\mu) = A(t)z_n + \mu f(Y_n + \mu^{n+2}\bar{y}_{n+2}, t) - \mu\frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}t}.$$

不难看出

$$H(0,\mu) = O(\mu^{n+2}). \tag{4.124}$$

把 (4.122) 代入 (4.85)—(4.87) 可得 $v(t,\mu)$, $u(t,\mu)$ 满足的方程和初值

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A(t)u + \mu f_y(v + \mu^{n+2}\tilde{y}_{n+2} + Y_{n+1}, t)v + G(v,t,\mu), \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = u, \\ u(0,\mu) = 0, \quad v(0,\mu) = 0, \end{cases} \tag{4.125}$$

这里

$$\begin{aligned} G(v,t,\mu) = A(t)z_n - \mu\frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}t} &+ \mu f(v + \mu^{n+2}\tilde{y}_{n+2} + Y_{n+1}, t) \\ &- \mu f_y(v + \mu^{n+2}\tilde{y}_{n+2} + Y_{n+1}, t)v, \end{aligned} \tag{4.126}$$

它具有下面两条性质:

1) $\|G(0,t,\mu)\| = H(0,\mu) = O(\mu^{n+2}), \quad 0 < \mu \leqslant \mu_0;$
2) $\forall\lambda > 0, \exists\delta > 0$, 当 $\|\tilde{v}\| \leqslant \delta$, $\|\hat{v}\| \leqslant \delta$ 时, 有 $\|G(\tilde{v},t,\mu) - G(\hat{v},t,\mu)\| \leqslant \lambda\|\tilde{v} - \hat{v}\|$.

把 (4.125) 重新写成简单形式

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au + \mu f_y v + G(v,t,\mu), \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = u, \\ u(0,\mu) = 0, \quad v(0,\mu) = 0. \end{cases} \tag{4.127}$$

对 (4.127) 进行变量替换 $u(t,\mu) = Tw(t,\mu)$,

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}w + T\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right) = ATw + \mu f_y v + G(v,t,\mu), \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = u, \\ w(0,\mu) = 0, \quad v(0,\mu) = 0. \end{cases} \tag{4.128}$$

我们取这样的矩阵 T, 它把 A 对角化,

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \tilde{A}w + \mu T^{-1}f_y v + \tilde{G}, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = u, \\ w(0,\mu) = 0, \quad v(0,\mu) = 0, \end{cases} \tag{4.129}$$

其中 $\tilde{G} = T^{-1}G - \mu T^{-1}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}w$.

再把 (4.129) 按分量写出

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 w_1 + \mu[(T^{-1}f_y)_{11}v_1 + (T^{-1}f_y)_{12}v_2] + \tilde{G}_1, \\ \mu\dfrac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}t} = \lambda_2 w_2 + \mu[(T^{-1}f_y)_{21}v_1 + (T^{-1}f_y)_{22}v_2] + \tilde{G}_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = T_{11}w_1 + T_{12}w_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = T_{21}w_1 + T_{22}w_2, \\ w_1(0,\mu) = 0, \quad w_2(0,\mu) = 0, \\ v_1(0,\mu) = 0, \quad v_2(0,\mu) = 0. \end{cases} \tag{4.130}$$

显然 $\tilde{G}(v, w, t, \mu)$ 具有和 G 相同的两个性质.

引进新记法

$$w = w_2, \quad v = (w_1, v_1, v_2)^{\mathrm{T}}. \tag{4.131}$$

这样把 (4.130) 重新写成

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \lambda_2 w + \mu < \mathrm{d}_1, v > + \tilde{G}_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \bar{T}v + \mathrm{d}_2 w + \tilde{\tilde{G}}_2, \\ w(0,\mu) = 0, \quad v(0,\mu) = 0, \end{cases} \tag{4.132}$$

这里 $\tilde{\tilde{G}}_2 = (\mu^{-1}\tilde{G}, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{d}_1 = (0, (T^{-1}f_y)_{11}, (T^{-1}f_y)_{12})^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{d}_2 = (0, T_{11}, T_{21})^{\mathrm{T}}$,

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} 0 & (T^{-1}f_y)_{21} & (T^{-1}f_y)_{22} \\ T_{12} & 0 & 0 \\ T_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.133}$$

把 (4.132) 中的方程组替换成等价的积分方程

$$\begin{cases} w = \displaystyle\int_0^t \mu^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mu}\int_s^t \lambda_2(\rho)\mathrm{d}\rho}[< \mathrm{d}_1, v > + \tilde{G}_1]\,\mathrm{d}s, \\ v = \displaystyle\int_0^t V(t,s)[\mathrm{d}_2 w(s,\mu) + \tilde{\tilde{G}}_2]\,\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{4.134}$$

其中 $V(t,s)$ 是齐次方程组 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \bar{T}v$ 的基本解矩阵. 显然, 它是有界的. 把 (4.134) 中第二个方程代入第一个方程

$$\begin{cases} w = \displaystyle\int_0^t K(t,s,\mu)w\mathrm{d}s + Q_1, \\ v = \displaystyle\int_0^t V(t,s)\mathrm{d}_2 w(s,\mu)\mathrm{d}s + Q_2. \end{cases} \tag{4.135}$$

在 (4.135) 中算子 $Q_i(i=1,2)$ 具有下面两条性质:

1) 存在 $\mu_0>0$, 当 $0<\mu<\mu_0$ 时

$$|Q_i(0,0,t,\mu)|\leqslant C\mu^{n+1},\quad i=1,2,\quad 0\leqslant t<T.$$

2) 任给 $\lambda>0$, 存在常数 $\delta>0$, 如果 $\|\tilde{v}\|\leqslant\delta,\quad\|\hat{v}\|\leqslant\delta,\quad\|\tilde{w}\|\leqslant\delta,\quad\|\hat{w}\|\leqslant\delta$, 则

$$|Q_i(\tilde{v},\tilde{w},t,\mu)-Q_i(\hat{v},\hat{w},t,\mu)|<\lambda(\|\tilde{v}-\hat{v}\|+\|\tilde{w}-\hat{w}\|).$$

下一步通过核 K 的预解式

$$\begin{cases} w=\displaystyle\int_0^t R(t,s,\mu)Q(v,w,t,\mu)\,\mathrm{d}s\equiv S_1(v,w,t,\mu),\\ v=\displaystyle\int_0^t V(t,s)\mathrm{d}_2w(s,\mu)\,\mathrm{d}s+S_2,\end{cases}\tag{4.136}$$

这样得到的算子 S_1, S_2 仍具有 Q_1, Q_2 的两条性质. 往下对 (4.136) 采用逐次逼近法, 就能证明 v, w 的存在性, 并且有估计式

$$\|v(t,\mu)\|\leqslant C\mu^{n+1},\quad\|w(t,\mu)\|\leqslant C\mu^{n+1},\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

定理 4.3 证毕. □

注释 4.5 我们可以把所讨论的初值问题 (4.85)—(4.87) 推广到高维情形, 其中 y,z 是 m 维向量. 对 $A(t)$ 的特征值有 $\lambda_i\equiv 0, i=1,\cdots,k$, $\mathrm{Re}\lambda_j<0, i=k+1,\cdots,m$.

4.5 临界情况拟线性方程组的无穷大初值问题

我们将讨论下面方程组 [5]

$$\begin{cases}\mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=A(y,t)z+\mu f(y,t),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z,\end{cases}\tag{4.137}$$

其中 y,z,f 均为二维向量, $\mu>0$ 是小参数, $A(y,t)$ 是行列式为零的二阶矩阵. 方程组 (4.137) 是临界情况下的方程组.

给出下面初值条件

$$y(0,\mu)=y^0,\qquad z(0,\mu)=\frac{z^{-1}}{\mu}.\tag{4.138}$$

本文将构造 (4.137), (4.138) 的渐近解, 并证明其解的存在性. 往下可以看出, 如果这类问题的解存在, 则 $z(0,\mu)$ 的分量是相互联系的. 它们的相互关系在构造渐近解时确定.

本文讨论的矩阵 $A(y,t)$ 具有下面形式

$$A(y,t)=\begin{pmatrix} a(y,t) & b(y,t) \\ -a(y,t) & -b(y,t) \end{pmatrix}.$$

$[\mathrm{H}_{4.18}]$ 假设 $a(y,t),b(y,t)$ 和 $f(y,t)$ 在 $D=\{0\leqslant t\leqslant 1,|y|\leqslant l\}$ 上有二阶连续偏导数 (l 为某个确定的正常数).

通过计算矩阵 $A(y,t)$ 的特征方程

$$\begin{vmatrix} a(y,t)-\lambda & b(y,t) \\ -a(y,t) & -b(y,t)-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

可得特征值 $\lambda_1=0$, 而 $\lambda_2=a(y,t)-b(y,t)$.

$[\mathrm{H}_{4.19}]$ 假设在 D 中 $\lambda_2=a(y,t)-b(y,t)<0$.

4.5.1 渐近解的构造

根据边界函数法, 方程组 (4.137) 的形式解为

$$\begin{cases} y=\bar{y}(t,\mu)+\Pi y(\tau,\mu), & \tau=\dfrac{t}{\mu}, \\ z=\bar{z}(t,\mu)+\Pi z(\tau,\mu), \end{cases} \tag{4.139}$$

其中

$$\bar{y}(t,\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i\bar{y}_i(t), \qquad \bar{z}(t,\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i\bar{z}_i(t) \tag{4.140}$$

为正则项级数;

$$\Pi y(\tau,\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i\Pi_i y(\tau), \qquad \Pi z(\tau,\mu)=\sum_{i=-1}^{\infty}\mu^i\Pi_i z(\tau) \tag{4.141}$$

是在 $t=0$ 处的边界层函数.

确定级数 (4.139) 零次近似是两个相同的方程

$$a(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)\bar{y}'_{10}+b(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)\bar{y}'_{20}=0. \tag{4.142}$$

而确定一次近似 $\bar{y}_{i1}(i=1,2)$ 的两个方程为

$$\begin{cases} \bar{y}''_{10}=\bar{a}\,\bar{y}'_{11}+\bar{b}\bar{y}'_{21}+(\bar{a}'_1\bar{y}_{11}+\bar{a}'_2\bar{y}_{21})\bar{y}'_{10}+(\bar{b}'_1\bar{y}_{11}+\bar{b}'_2\bar{y}_{21})\bar{y}'_{20}+\bar{f}_{10}, \\ \bar{y}''_{20}=-\bar{a}\,\bar{y}'_{11}-\bar{b}\bar{y}'_{21}-(\bar{a}'_1\bar{y}_{11}+\bar{a}'_2\bar{y}_{21})\bar{y}'_{10}-(\bar{b}'_1\bar{y}_{11}+\bar{b}'_2\bar{y}_{21})\bar{y}'_{20}+\bar{f}_{20}, \end{cases} \tag{4.143}$$

其中 $\bar{a},\bar{b},\bar{f}_{10},\bar{f}_{20}$ 均表示在点 $(\bar{y}_{10},\bar{y}_{20},t)$ 处取值, 而下标 1, 2 分别表示 $\bar{a},\bar{b},\bar{f}$ 对第 1, 2 个位置的偏导数.

把 (4.143) 的两个方程相加

$$\bar{y}_{10}'' + \bar{y}_{20}'' = \bar{f}_{10} + \bar{f}_{20}. \tag{4.144}$$

在 (4.142) 中对 t 求导

$$\bar{a}\bar{y}_{10}'' + \bar{b}\bar{y}_{20}'' + \bar{a}'\bar{y}_{10}' + \bar{b}'\bar{y}_{20}' = 0. \tag{4.145}$$

由条件 [$H_{4.19}$] 可以从 (4.144), (4.145) 解得

$$\bar{y}_{i0}'' = F_i(\bar{y}_{10}', \bar{y}_{20}', \bar{y}_{10}, \bar{y}_{20}, t), \quad i = 1, 2. \tag{4.146}$$

这里关于 F_i 的具体细节不再描述.

方程组 (4.146) 的求解需要有四个定解条件, 即要求 $\bar{y}_{i0}(0)$, $\bar{y}_{i0}'(0)$ $(i = 1, 2)$. 为了得到这些初值, 需要先求出边界函数的主项 $\Pi_{-1}z_i$,$\Pi_0 y_i$, 它们满足下面的方程及边值条件

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_{-1}z_1}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{a}\Pi_{-1}z_1 + \tilde{b}\Pi_{-1}z_2, \quad \dfrac{\mathrm{d}\Pi_{-1}z_2}{\mathrm{d}\tau} = -\dfrac{\mathrm{d}\Pi_{-1}z_1}{\mathrm{d}\tau}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_0 y_i}{\mathrm{d}\tau} = \Pi_{-1}z_i, \quad i = 1, 2 & (4.147) \\ \Pi_{-1}z(\infty) = 0, \quad \Pi_0 y(\infty) = 0, \\ \Pi_{-1}z(0) = z^{-1}, \quad \Pi_0 y(0) = y^0 - \bar{y}_0(0). & (4.148) \end{cases}$$

这里和以下 "~" 均表示函数在 $(\bar{y}_{10}(0) + \Pi_0 y_1, \bar{y}_{20}(0) + \Pi_0 y_2, 0)$ 取值.

从 (4.147) 中第二, 第三个方程和在无穷大条件可得

$$\begin{aligned} &\Pi_{-1}z_1(\tau) + \Pi_{-1}z_2(\tau) = 0, \\ &\Pi_0 y_1(\tau) + \Pi_0 y_2(\tau) = 0. \end{aligned} \tag{4.149}$$

在 (4.149) 中令 $\tau = 0$ 可得

$$z_1^{-1} + z_2^{-1} = 0, \tag{4.150}$$

$$y_1^0 - \bar{y}_{10}(0) + y_2^0 - \bar{y}_{20}(0) = 0. \tag{4.151}$$

关系式 (4.150) 确定了 $z(0, \mu)$ 分量之间的关系. 而 (4.151) 给出了 $\bar{y}_{10}(0)$ 与 $\bar{y}_{20}(0)$ 之间的联系. 为了最终确定 $\bar{y}_{10}(0)$ 与 $\bar{y}_{20}(0)$ 还需要一个关系式.

利用 (4.149) 的第一个方程从 (4.147) 式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Pi_{-1}z_1 = (\tilde{a} - \tilde{b})\Pi_{-1}z_1 = \tilde{\lambda}_2\Pi_{-1}z_1, \tag{4.152}$$

再结合 (4.147) 的第三个方程

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_{-1}z_1}{\mathrm{d}\Pi_0 y_1} = \tilde{\lambda}_2 = \lambda_2(\bar{y}_{10}(0) + \Pi_0 y_1, \bar{y}_{20}(0) - \Pi_0 y_1, 0), \tag{4.153}$$

对 (4.153) 进行积分, 并考虑到 (4.150) 和 (4.151), 得到

$$\begin{aligned}\Pi_{-1}z_1 &= z_1^{-1} + \int_{y_1^0-\bar{y}_{10}(0)}^{\Pi_0 y_1} \lambda_2(\bar{y}_{10}(0)+\xi, y_1^0+y_2^0-\bar{y}_{10}(0)-\xi, 0)\mathrm{d}\xi \\ &= z_1^{-1} + \int_{y_1^0}^{\bar{y}_{10}(0)+\Pi_0 y_1} \lambda_2(\eta, y_1^0+y_2^0-\eta, 0)\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned} \tag{4.154}$$

在 (4.154) 中令 $\tau=\infty$ 可得

$$0 = z_1^{-1} + \int_{y_1^0}^{\bar{y}_{10}(0)} \lambda_2(\eta, y_1^0+y_2^0-\eta, 0)\mathrm{d}\eta. \tag{4.155}$$

请注意 (4.155) 只含有未知变量 $\bar{y}_{10}(0)$.

[$\mathrm{H}_{4.20}$] 假设方程 (4.155) 有解 $\bar{y}_{10}(0)=y_{10}^*$.

再从 (4.151) 可得 $\bar{y}_{20}(0)=y_1^0+y_2^0-y_{10}^*=y_{20}^*$. 这样就确定了 (4.146) 中的两个初值

$$\bar{y}_{10}(0)=y_{10}^*, \quad \bar{y}_{20}(0)=y_{20}^*. \tag{4.156}$$

往下需要求出 $\bar{y}_{i0}'(0)(i=1,2)$. 为此写出确定边界函数 $\Pi_0 z, \Pi_1 y$ 的方程和定解条件

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\Pi_0 z_1}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{a}\Pi_0 z_1 + \tilde{b}\Pi_0 z_2 + F_0(\Pi_{-1}z_1, \Pi_{-1}z_2, \Pi_0 y_1, \Pi_0 y_2, \tau), \\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_0 z_2}{\mathrm{d}\tau} = -\dfrac{\mathrm{d}\Pi_0 z_1}{\mathrm{d}\tau}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_1 y_i}{\mathrm{d}\tau} = \Pi_0 z_i, \\ \Pi_0 z_i(0) = -\bar{z}_{i0}(0), \quad \Pi_1 y_i(0) = -\bar{y}_{i1}(0), \\ \Pi_0 z_i(\infty) = 0, \quad \Pi_1 y_i(\infty) = 0, \ i=1,2, \end{cases} \tag{4.157}$$

这里关于函数 F_0 所需的条件将在后面给出.

类似于得到 (4.149) 有 $\Pi_0 z_1(\tau)+\Pi_0 z_2(\tau)=0$, 把 $\tau=0$ 代入 $\Pi_0 z_1(0)+\Pi_0 z_2(0)=0$.

由此推得

$$\bar{z}_{10}(0)+\bar{z}_{20}(0) = -(\Pi_0 z_1(0)+\Pi_0 z_2(0)) = 0,$$

即

$$\bar{y}_{10}'(0)+\bar{y}_{20}'(0)=0. \tag{4.158}$$

再由 (4.142) 有

$$\bar{a}\bar{y}_{10}'(0)+\bar{b}\bar{y}_{20}'(0)=0, \tag{4.159}$$

其中 $\bar{a}=a(\bar{y}_{10}(0),\bar{y}_{20}(0),0)$, $\bar{b}=b(\bar{y}_{10}(0),\bar{y}_{20}(0),0)$.

根据 [$H_{4.19}$] 从方程组 (4.158), (4.159) 解得

$$\bar{y}'_{10}(0) = \bar{y}'_{20}(0) = 0. \tag{4.160}$$

这样, 我们又得到了 (4.146) 的两个初值条件.

[$H_{4.21}$] 假设在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上方程组 (4.146) 和初值 (4.156), (4.160) 有解 $\bar{y}_{10}(t)$, $\bar{y}_{20}(t)$.

我们把 (4.147) 写成

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_0 y_1}{\mathrm{d}\tau} = z_1^{-1} + \int_{y_1^0}^{\bar{y}_{10}(0)+\Pi_0 y_1} \lambda_2(\eta, y_1^0 + y_2^0 - \eta, 0)\,\mathrm{d}\eta.$$

由 (4.155) 可知, 该方程有平衡点 $\Pi_0 y_1(\tau) = 0$.

[$H_{4.22}$] 假设初值 $\Pi_0 y_1(0) = y_1^0 - \bar{y}_{10}(0)$ 在平衡点 $\Pi_0 y_1(\tau) = 0$ 的影响域内.

条件 [$H_{4.22}$] 保证了解 $\Pi_0 y_1(\tau)$ 的存在, 且有

$$|\Pi_0 y_1(\tau)| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa_0 \tau}. \tag{4.161}$$

再由 (4.147), (4.157) 可知

$$|\Pi_0 y_i(\tau)| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa_0 \tau}, \qquad |\Pi_{-1} z_i(\tau)| \leqslant C\mathrm{e}^{-\kappa_0 \tau},\ i = 1, 2. \tag{4.162}$$

这样我们就得到了渐近展开式的主项.

下面考虑一次近似解

$$\begin{cases} \bar{z}'_{11} = \bar{a}\,\bar{z}_{12} + \bar{b}\,\bar{z}_{22} + (\bar{a}_1\bar{y}_{11} + \bar{a}_2\bar{y}_{21})\bar{z}_{11} + (\bar{b}_1\bar{y}_{11} + \bar{b}_2\bar{y}_{21})\bar{z}_{21} + (\bar{a}_{11}\bar{y}_{12} + \bar{a}_{22}\bar{y}_{22} \\ \qquad +2\bar{a}_{12}\bar{y}_{11}\bar{y}_{21})\bar{z}_{10} + (\bar{b}_{11}\bar{y}_{12} + \bar{b}_{22}\bar{y}_{22} + 2\bar{b}_{12}\bar{y}_{11}\bar{y}_{21})\bar{z}_{20} + \bar{f}_{11}\bar{y}_{11} + \bar{f}_{12}\bar{y}_{21}, \\ \bar{z}'_{21} = -[\bar{a}\,\bar{z}_{12} + \bar{b}\,\bar{z}_{22} + (\bar{a}_1\bar{y}_{11} + \bar{a}_2\bar{y}_{21})\bar{z}_{11} + (\bar{b}_1\bar{y}_{11} + \bar{b}_2\bar{y}_{21})\bar{z}_{21} + (\bar{a}_{11}\bar{y}_{12} + \bar{a}_{22}\bar{y}_{22} \\ \qquad +2\bar{a}_{12}\bar{y}_{11}\bar{y}_{21})\bar{z}_{10} + (\bar{b}_{11}\bar{y}_{12} + \bar{b}_{22}\bar{y}_{22} + 2\bar{b}_{12}\bar{y}_{11}\bar{y}_{21})\bar{z}_{20}] + \bar{f}_{21}\bar{y}_{11} + \bar{f}_{22}\bar{y}_{21}. \end{cases} \tag{4.163}$$

把 (4.163) 的两式相加

$$\bar{y}''_{11} + \bar{y}''_{21} = (\bar{f}_{11} + \bar{f}_{21})\bar{y}_{11} + (\bar{f}_{12} + \bar{f}_{22})\bar{y}_{21}. \tag{4.164}$$

对 (4.143) 的第一个方程关于 t 求导

$$\bar{y}'''_{10} = \bar{a}'\,\bar{y}'_{11} + \bar{a}\,\bar{y}''_{11} + \bar{b}'\bar{y}'_{21} + \bar{b}'\bar{y}''_{21} + \bar{f}'_{10} + h_1(\bar{y}_{i0}, \bar{y}_{i1}, \bar{y}'_{i0}, \bar{y}'_{i1}, t),\ i = 1, 2, \tag{4.165}$$

这里 $h_1(\bar{y}_{i0}, \bar{y}_{i1}, \bar{y}'_{i0}, \bar{y}'_{i1}, t)$ 为已知的复合函数. 由于比较繁琐, 具体表达式从略. $\bar{a}', \bar{b}'$ 分别表示对 t 求导, 暂不具体展开.

在方程组 (4.164), (4.165) 中把 $\bar{y}''_{i1}$ 表示出来

$$\begin{cases} \bar{y}''_{11} = G_1(\bar{y}'_{11}, \bar{y}'_{21}, \bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}, t), \\ \bar{y}''_{21} = G_2(\bar{y}'_{11}, \bar{y}'_{21}, \bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}, t), \end{cases} \tag{4.166}$$

其中 G_i 线性依赖于 $\bar{y}'_{i1}, \bar{y}_{i1}$, 是 $\bar{y}'_{i1}, \bar{y}_{i1}, \bar{y}'_{i0}, \bar{y}_{i0}$ 的已知函数.

为了求解方程组 (4.166), 我们同样需要四个定解条件. 从 (4.157) 的 $\Pi_0 z_1(\tau) + \Pi_0 z_2(\tau) = 0$, 可得 $\Pi_1 y_1(\tau) + \Pi_1 y_2(\tau) = 0$.

令 $\tau = 0$, 有 $\Pi_1 y_1(0) + \Pi_1 y_2(0) = 0$. 又从 $\bar{y}_{i1}(0) + \Pi_1 y_i(0) = 0$, 得到 $\bar{y}_{11}(0) + \bar{y}_{21}(0) = 0$.

下面详细写出方程 (4.157)

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_0 z_1}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{a}\Pi_0 z_1 + \tilde{b}\Pi_0 z_2 + \Pi_{-1} z_1[\tilde{a_1}(\bar{y}_{11}(0) + \Pi_1 y_1) + \tilde{a_2}(\bar{y}_{21}(0) + \Pi_1 y_2)]$$
$$+\Pi_{-1} z_2[\tilde{b_1}(\bar{y}_{11}(0) + \Pi_1 y_1) + \tilde{b_2}(\bar{y}_{21}(0) + \Pi_1 y_2)] + \varphi_0, \tag{4.167}$$

此处

$$\varphi_0 = [\tilde{a}_1 \bar{y}'_{10}(0)\tau + \tilde{a}_2 \bar{y}'_{20}(0)\tau + \tilde{a}_3 \tau]\Pi_{-1} z_1$$
$$+[\tilde{b}_1 \bar{y}'_{10}(0)\tau + \tilde{b}_2 \bar{y}'_{20}(0)\tau + \tilde{b}_3 \tau]\Pi_{-1} z_2 + \tilde{a}\bar{z}_{10}(0) + \tilde{b}\bar{z}_{20}(0). \tag{4.168}$$

类似于对 $\Pi_{-1} z_1$ 的讨论, 为了求出 $\bar{y}_{i1}(0)$, 通过对 (4.167) 积分化到 (4.154). 但这里对 (4.167) 这样做就比较复杂.

[$\mathrm{H}_{4.23}$] 假设满足条件

$$\frac{\partial a}{\partial y_2}(y_1, y_2, 0) = \frac{\partial b}{\partial y_1}(y_1, y_2, 0).$$

注意到 $a\mathrm{d}y_1 + b\mathrm{d}y_2$ 是全微分, 所以把 (4.167) 化成

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_0 z_1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tilde{a}\Pi_1 y_1 + \tilde{b}\Pi_1 y_2) + \bar{y}_{11}(0)\frac{\mathrm{d}\tilde{a}}{\mathrm{d}\tau} + \bar{y}_{21}(0)\frac{\mathrm{d}\tilde{b}}{\mathrm{d}\tau} + \varphi_0. \tag{4.169}$$

对 (4.169) 进行积分有

$$\Pi_0 z_1 = \tilde{a}\Pi_1 y_1 + \tilde{b}\Pi_1 y_2 + \bar{y}_{11}(0)\tilde{a}\,|_{\infty}^{\tau} + \bar{y}_{21}(0)\tilde{b}\,|_{\infty}^{\tau} + \int_{\infty}^{\tau} \varphi_0 \,\mathrm{d}\tau, \tag{4.170}$$

这里表达式中最后的积分项是收敛的.

考虑到

$$\Pi_0 z_i(0) = -\bar{z}_{i0}(0) = -\bar{y}'_{i0}(0),\ i = 1, 2, \tag{4.171}$$

所以在 (4.170) 中令 $\tau = 0$, 有

$$-y'_{10}(0) = (\tilde{a}\Pi_1 y_1 + \tilde{b}\Pi_1 y_2)_{\tau=0} + \bar{y}_{11}(0)\tilde{a}\,|_{\infty}^{0} + \bar{y}_{21}(0)\tilde{b}\,|_{\infty}^{0} + \int_{\infty}^{0} \varphi_0 \,\mathrm{d}\tau. \tag{4.172}$$

再利用 $\Pi_1 y_2(0) = -\Pi_1 y_1(0)$, $\bar{y}_{21}(0) = -\bar{y}_{11}(0)$, 可把 (4.172) 写成

$$-y'_{10}(0) = (\tilde{a} - \tilde{b})_{\tau=0}\Pi_1 y_1(0) + \int_{\infty}^{0} \varphi_0 \,\mathrm{d}\tau$$
$$= -\bar{y}_{11}(0)\lambda_2(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0) + \int_{\infty}^{0} \varphi_0 \mathrm{d}\tau, \tag{4.173}$$

这里用到 $\Pi_1 y_1(0) = -\bar{y}_{11}(0)$. 从 (4.173) 求得

$$\bar{y}_{11}(0) = y_{11}^*, \qquad \bar{y}_{21}(0) = -y_{11}^* = y_{21}^*. \tag{4.174}$$

为了得到 $\bar{y}'_{11}(0), \bar{y}'_{21}(0)$ 需要写出确定 $\Pi_1 z, \Pi_2 y$ 的方程和定解条件

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi_1 z_1}{\mathrm{d}\tau} = (\tilde{a}\Pi_1 z_1 + \tilde{b}\Pi_1 z_2 + F_1) + \Pi_0 f_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi_1 z_2}{\mathrm{d}\tau} = -(\tilde{a}\Pi_1 z_1 + \tilde{b}\Pi_1 z_2 + F_1) + \Pi_0 f_2, \\ \Pi_1 z_i(0) = -\bar{z}_{i1}(0) = -\bar{y}'_{i1}(0), \\ \Pi_1 z_i(\infty) = 0, \end{cases} \tag{4.175}$$

其中

$$F_1 = F_1(\Pi_{-1} z_1, \Pi_{-1} z_2, \Pi_0 z_1, \Pi_0 z_2, \Pi_0 y_1, \Pi_0 y_2, \Pi_1 y_1, \Pi_1 y_2, \tau),$$
$$\Pi_0 f_i = f_i(\bar{y}_{10}(0) + \Pi_0 y_1, \bar{y}_{20}(0) + \Pi_0 y_2, 0) - f_i(\bar{y}_{10}(0), \bar{y}_{20}(0), 0).$$

把 (4.175) 中两个方程相加

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Pi_1 z_1 + \Pi_1 z_2) = \Pi_0 f_1 + \Pi_0 f_2,$$

积分后得

$$\Pi_1 z_1 + \Pi_1 z_2 = \int_\infty^\tau (\Pi_0 f_1 + \Pi_0 f_2)\,\mathrm{d}\tau.$$

令 $\tau = 0$, 并考虑到 $\Pi_1 z_i(0) = -\bar{y}'_{i1}(0)$, 有

$$-\bar{y}'_{11}(0) - \bar{y}'_{21}(0) = \int_\infty^0 (\Pi_0 f_1 + \Pi_0 f_2)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.176}$$

在 (4.143) 中令 $t = 0$ 可得

$$\bar{y}''_{10}(0) = [\bar{a}\,\bar{y}'_{11} + \bar{b}\bar{y}'_{21} + (\bar{a}'_1\bar{y}_{11} + \bar{a}'_2\bar{y}_{21})\bar{y}'_{10} + (\bar{b}'_1\bar{y}_{11} + \bar{b}'_2\bar{y}_{21})\bar{y}'_{20} + \bar{f}_{10}]\,|_{t=0}\,. \tag{4.177}$$

这样, 从 (4.176), (4.177) 就可以求出

$$\bar{y}'_{11}(0) = \bar{y}_{11}^*, \qquad \bar{y}'_{21}(0) = \bar{y}_{21}^*. \tag{4.178}$$

有了四个初值 (4.174) 与 (4.178), 方程组 (4.166) 就可解了. 再从 (4.175) 就可求得 $\Pi_1 y, \Pi_0 z$.

这样, 最终我们确定了 $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \Pi_{-1} z, \Pi_0 y, \Pi_0 z, \Pi_1 y$.

定理 4.4 如果满足条件 $[\mathrm{H}_{4.18}]$—$[\mathrm{H}_{4.23}]$, 则存在常数 $\mu_0 > 0, C > 0$, 使得当 $\mu < \mu_0$ 时, 问题 (4.137), (4.138) 的解 $y(t,\mu)$, $z(t,\mu)$ 存在, 其中 $z_1^{-1} + z_2^{-1} = 0$, 且有下面的估计

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \|y(t,\mu) - \bar{Y}_0\| < C\mu, \quad \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \|z(t,\mu) - \bar{Z}_0\| < C\mu, \tag{4.179}$$

这里 $\bar{Y}_0 = \bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(\tau)$, $\bar{Z}_0 = \bar{z}_0(t) + \mu^{-1}\Pi_{-1} z(\tau) + \Pi_0 z(\tau)$.

证明 引进新变量

$$y_1 = y, \quad z_1 = z; \quad p = y_1 + y_2, \quad q = z_1 + z_2.$$

记 $f = f_1 + f_2$. 则 (4.137) 可化成下面的方程组和初值

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = [a(y,p-y,t) - b(y,p-y,t)]z + b(y,p-y,t)q + \mu f_1(y,p-y,t) \\ \qquad = \lambda_2(y,p-y,t)z + b(y,p-y,t)q + \mu f_1(y,p-y,t), \\ \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = f(y,p-y,t), \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = z, \quad \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = q, \qquad\qquad (4.180) \\ z(0,\mu) = \dfrac{z_1^{-1}}{\mu}, \quad q(0,\mu) = \dfrac{z_1^{-1}}{\mu} + \dfrac{z_2^{-1}}{\mu} = 0, \\ y(0,\mu) = y_1^0, \quad p(0,\mu) = y_1^0 + y_2^0. \qquad\qquad (4.181) \end{cases}$$

在 [1] 中曾讨论过下面问题

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = A(y,t)z + B(y,t) \quad (A(y,t) < 0), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = z, \\ z(0,\mu) = \dfrac{z^{-1}}{\mu}, \quad y(0,\mu) = y^0. \end{cases} \tag{4.182}$$

这里所讨论的 (4.137), (4.138) 与 (4.182) 的不同在于它有三个慢变量, 但这不妨碍套用 [1] 的方法进行讨论.

对 (4.180), (4.181) 作变量替换

$$u = z(t,\mu) - \bar{Z}_0, \quad v = y(t,\mu) - \bar{Y}_0 - \mu\tilde{y}_1(\tau),$$
$$\xi = p(t,\mu) - p_0 - \mu p_1(\tau), \quad \eta = q(t,\mu) - Q_0 - \mu\tilde{q}_1(\tau),$$

其中 $\tilde{y}_1(\tau) = \bar{y}_1(0) + \Pi_1 y$.

对定理 4.4 在此不进行详细证明, 只简单介绍一下证明思路. 首先写出关于 u, v, ξ, η 满足的微分方程, 接着把它化为等价的积分方程, 随后采用逐次逼近法证明. 这是对奇摄动问题进行余项估计的常用方法. 因为在证明过程中涉及 $\bar{y}_1(0)$ 和 $\Pi_1 y$. 所以我们不仅需要求出零次近似, 还要求出一次近似. 最终就能证明解的存在性和得到估计式

$$\|u\| < C\mu, \quad \|v\| < C\mu, \quad \|\xi\| < c\mu, \quad \|\eta\| < C\mu,$$

即得到 (4.179). □

第五章　阶梯状空间对照结构

5.1 半线性方程的阶梯状解

5.1.1 问题的提出

在前几章中我们讨论了奇摄动初边值问题, 即当 $\mu\to 0$ 时, 它们的解, 除去边界层邻域都趋向于退化问题的某一个解. 但是, 在 $[0,1]$ 上讨论边值问题时, 有可能产生这种情况: 退化问题有几个解, 当 $\mu\to 0$ 时, 在区间的一部分 $[0,t^*]$ 上, 解趋向于退化问题的一个解, 而在区间的另一部分 $[t^*,1]$ 上, 解趋向于退化问题的另一个解. 这样, 在点 t^* 附近产生解的快变化邻域, 造成问题的解从一个退化解向另一个退化解的快速转移. 通常这个邻域称为内部转移层 [1], 而具有内部转移层的解称为空间对照结构 [8, 13], t^* 称为转移点. 一般来说, 转移点是事先未知的, 需要确定. 当然, 在 $[0,1]$ 上也可以存在若干个转移点, 在这些点上会产生不同根之间的跳跃.

下面将讨论 Dirichlet 问题阶梯状空间对照结构, 并且转移点是惟一的情况, 对多个转移点情况可类似讨论.

$$\begin{cases}\mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F(y,t),\quad 0<t<1, & (5.1)\\ y(0,\mu)=y^0,\quad y(1,\mu)=y^1. & (5.2)\end{cases}$$

可以把方程 (5.1) 写成等价方程组

$$\mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=F(y,t),\quad \mu\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z. \tag{5.3}$$

先做下面假设

[H$_{5.1}$] 假设在 D 上 $F(y,t)$ 充分光滑, 其中

$$D=\{(y,t)\big|A<y<B,\,0<t<1\},$$

此外, 初值 $y^0, y^1 \in (A, B)$, 而 A, B 是给定的两个实数.

[$\mathrm{H}_{5.2}$] 假设在 $[0,1]$ 上退化方程

$$F(y,t)=0$$

有三个孤立根 $\varphi_i(t)\ (i=1,2,3)$, 不妨令 $\varphi_1(t)<\varphi_2(t)<\varphi_3(t)$, 且满足不等式

$$F_y(\varphi_i(t),t)>0(i=1,3),\quad F_y(\varphi_2(t),t)<0.$$

为了讨论问题方便起见, 不妨认为 $\varphi_1(0)=y^0$, $\varphi_3(0)=y^1$. 如果该条件不满足的话, 只要构造渐近解时, 在两端点添加相应的边界函数校正即可.

根据 [$\mathrm{H}_{5.2}$], 对固定的 t, 在相平面 (y,z) 上, 平衡点 $M_{1,3}(\varphi_{1,3},0)$ 是鞍点, $M_2(\varphi_2,0)$ 是中心. 事实上, 特征方程

$$\begin{vmatrix}\lambda & \bar{F}_y(\varphi_i(t),t)\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\bar{F}_y(\varphi_i(t),t)=0$$

的根为

$$\lambda_{1,2}^{(i)}=\pm\sqrt{\bar{F}_y(\varphi_i(t),t)}.$$

可见当 $i=1,3$ 时特征值 $\lambda_1^{(i)}>0$, $\lambda_2^{(i)}<0$, 而 $i=2$ 时特征值是纯虚根.

我们将证明问题 (5.1), (5.2) 存在从 φ_1 附近转移到 φ_3 附近的阶梯状解 $y(t,\mu)$. 记 $t^*(\mu)$ 为解 $y(t,\mu)$ 和 $y=\varphi_2(t)$ 交点的横坐标 (转移点). 可以认为这种阶梯状解是由下面两个具有纯边界层解的左右问题的解 $y^{(\mp)}(t,\mu)$ 光滑连接而成的.

左问题 $(0\leqslant t\leqslant t^*)$:

$$\begin{cases}\mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2y^{(-)}}{\mathrm{d}t^2}=F(y^{(-)},t), & (5.4)\\ y^{(-)}(0,\mu)=y^0,\quad y^{(-)}(t^*,\mu)=\varphi_2(t^*). & (5.5)\end{cases}$$

右问题 $(t^*\leqslant t\leqslant 1)$:

$$\begin{cases}\mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2y^{(+)}}{\mathrm{d}t^2}=F(y^{(+)},t), & (5.6)\\ y^{(+)}(t^*,\mu)=\varphi_2(t^*),\quad y^{(+)}(1,\mu)=y^1. & (5.7)\end{cases}$$

从 (5.5), (5.7) 可见在点 t^* 处 $y^{(-)}$ 和 $y^{(+)}$ 是连续的, 为了使它们光滑连接起来, 还需要满足条件

$$\frac{\mathrm{d}y^{(-)}}{\mathrm{d}t}(t^*,\mu)=\frac{\mathrm{d}y^{(+)}}{\mathrm{d}t}(t^*,\mu),\tag{5.8}$$

或者

$$z^{(-)}(t^*,\mu)=z^{(+)}(t^*,\mu),$$

这也是确定 t^* 的方程.

这里我们将用边界层函数法来构造渐近展开式的零次近似 (构造高次近似是类似的), 再用 Nagumo 定理证明解的存在性和进行余项估计. 为此先叙述一下 Nagumo 定理

Nagumo 定理 假设问题

$$\begin{cases} Ly \equiv y'' - F(y,t) = 0, \quad 0 < t < 1, & (5.9) \\ y(0) = y^0, \quad y(1) = y^1, & (5.10) \end{cases}$$

的上下解 $\beta(t)$, $\alpha(t)$ 具有下面性质:

(1) $\alpha(t) \leqslant \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$

(2) $L\beta \leqslant 0, \quad L\alpha \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$

(3) $\alpha(0) \leqslant y^0 \leqslant \beta(0), \quad \alpha(1) \leqslant y^1 \leqslant \beta(1);$

(4) 如果上下解是不光滑函数, 要求在所有间断点 t_k 上左右导数满足不等式

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}(t_k-) \geqslant \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}(t_k+), \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}(t_k-) \leqslant \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}(t_k+),$$

那么 (5.9), (5.10) 的解 $y(t)$ 存在, 且满足不等式

$$\alpha(t) \leqslant y(t) \leqslant \beta(t).$$

5.1.2 零次阶梯状渐近解的构造

我们将构造左右问题的渐近解, 认为它们具有下面形式

$$w^{(-)}(t,\mu) = \bar{w}^{(-)}(t,\mu) + Q^{(-)}w(\tau,\mu), \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*, \tag{5.11}$$

$$w^{(+)}(t,\mu) = \bar{w}^{(+)}(t,\mu) + Q^{(+)}w(\tau,\mu), \quad t^* \leqslant t \leqslant 1, \tag{5.12}$$

其中 $w = (z,y)^{\mathrm{T}}$,

$$\bar{w}^{(\mp)}(t,\mu) = \bar{w}^{(\mp)}(t) + \mu\bar{w}_1^{(\mp)}(t) + \cdots \tag{5.13}$$

是正则级数;

$$Q^{(\mp)}w(\tau,\mu) = Q_0^{(\mp)}w(\tau) + \mu Q_1^{(\mp)}w(\tau) + \cdots, \quad \tau = \frac{t-t^*}{\mu} \tag{5.14}$$

是在 $t = t^*$ 邻域的内部层级数.

寻求转移点 t^* 为下面形式

$$t^* = t_0 + \mu t_1 + \cdots, \tag{5.15}$$

其中 $t_i(i=0,1,\cdots)$ 是待定参数.

构造渐近解的过程主要是做三方面工作: (1) 确定 (5.11), (5.12) 中的渐近级数系数; (2) 确定转移点 (5.15) 中展开式的系数; (3) 对内部层函数进行指数估计. 一般而言, 这三方面工作是同时进行的.

展开式 (5.11), (5.12) 中的系数由边界层函数法来确定, 即把式 (5.11), (5.12) 代入问题 (5.2), (5.3) 并按尺度 t,τ 进行分离

$$\mu\frac{\mathrm{d}\bar{z}^{(\mp)}}{\mathrm{d}t}=F(\bar{y}^{(\mp)}(t,\mu),t),\quad \mu\frac{\mathrm{d}\bar{y}^{(\mp)}}{\mathrm{d}t}=\bar{z}^{(\mp)}, \tag{5.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q^{(\mp)}z}{\mathrm{d}\tau}=F(\bar{y}^{(\mp)}(t^*+\tau\mu)+Q^{(\mp)}y,t^*+\tau\mu)-F(\bar{y}^{(\mp)}(t^*+\tau\mu),t^*+\tau\mu), \tag{5.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q^{(\mp)}y}{\mathrm{d}\tau}=Q^{(\mp)}z,\quad Q^{(\mp)}y(0,\mu)=\varphi_2(t^*)-\bar{y}^{(\mp)}(t^*,\mu),$$

$$Q^{(\mp)}y(\mp\infty,\mu)=0,\quad Q^{(\mp)}z(\mp\infty,\mu)=0. \tag{5.18}$$

再把 (5.13), (5.14) 代入 (5.16), (5.17) 和 (5.18), 比较 μ 同次幂, 可得确定各渐近项的方程和边值.

光滑性条件 (5.8) 的零次近似和一次近似关系式可写成

$$Q_0^{(-)}z(0)=Q_0^{(+)}z(0), \tag{5.19}$$

$$Q_1^{(-)}z(0)+\varphi_1'(t_0)=Q_1^{(+)}z(0)+\varphi_3'(t_0). \tag{5.20}$$

从 (5.16) 的零次近似可得

$$0=F(\bar{y}_0^{(\mp)},t),\quad \bar{z}_0=0.$$

由 $[\mathrm{H}_{5.2}]$ 得到间断解

$$\bar{y}_0=\begin{cases} y_0^{(-)}=\varphi_1(t), & t<t_0,\\ y_0^{(+)}=\varphi_3(t), & t>t_0.\end{cases}$$

零次内部层项系数 $Q_0^{(\mp)}y,Q_0^{(\mp)}z$ 由下面问题确定

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Q_0^{(\mp)}z}{\mathrm{d}\tau}=F(\varphi_{1,3}(t_0)+Q_0^{(\mp)}y,t_0),\quad \dfrac{\mathrm{d}Q_0^{(\mp)}y}{\mathrm{d}\tau}=Q_0^{(\mp)}z, & (5.21)\\ Q_0^{(\mp)}y(0)=\varphi_2(t_0)-\varphi_{1,3}(t_0), \\ Q_0^{(\mp)}y(\mp\infty)=0,\quad Q_0^{(\mp)}z(\mp\infty)=0. & (5.22)\end{cases}$$

在进行变量替换

$$\tilde{y}^{(\mp)}=\bar{y}_0^{(\mp)}(t_0)+Q_0^{(\mp)}y,\quad \tilde{z}^{(\mp)}=\bar{z}_0^{(\mp)}(t_0)+Q_0^{(\mp)}z=Q_0^{(\mp)}z \tag{5.23}$$

之后问题 (5.21), (5.22) 可写成下面简单形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{z}^{(\mp)}}{\mathrm{d}\tau}=F(\tilde{y}^{(\mp)},t_0),\quad \dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}^{(\mp)}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{z}^{(\mp)}, & (5.24)\\ \tilde{y}^{(\mp)}(0)=\varphi_2(t_0), \\ \tilde{y}^{(\mp)}(\mp\infty)=\varphi_{1,3}(t_0),\quad \tilde{z}^{(\mp)}(\mp\infty)=0. & (5.25)\end{cases}$$

如果 t_0 已知的话, 由条件 $[H_{5.2}]$ 可知问题 (5.24), (5.25) 的解总是存在的. 所以往下需要确定 t_0. 这时关系式 (5.19) 被写成

$$\tilde{z}^{(-)}(0) = \tilde{z}^{(+)}(0). \tag{5.26}$$

对 (5.24) 进行积分并考虑到 (5.25) 有

$$[\tilde{z}^{(-)}(\tau)]^2 = 2\int_{\varphi_1(t_0)}^{\tilde{y}^{(-)}(\tau)} F(y,t_0)\,\mathrm{d}y, \qquad [\tilde{z}^{(+)}(\tau)]^2 = 2\int_{\varphi_3(t_0)}^{\tilde{y}^{(+)}(\tau)} F(y,t_0)\,\mathrm{d}y. \tag{5.27}$$

把 (5.27) 代入 (5.26) 可得

$$\int_{\varphi_3(t_0)}^{\varphi_2(t_0)} F(y,t_0)\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi_1(t_0)}^{\varphi_2(t_0)} F(y,t_0)\,\mathrm{d}y,$$

或者

$$I(t_0) = \int_{\varphi_1(t_0)}^{\varphi_3(t_0)} F(y,t_0)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{5.28}$$

这就是确定转移点 t^* 主项 t_0 的方程.

$[H_{5.3}]$　假设方程 (5.28) 有解 $t=t_0$, 并且 $I'(t_0)<0$.

因为

$$\begin{aligned} I'(t_0) &= F(\varphi_3,t_0)\varphi_3' - F(\varphi_1,t_0)\varphi_1' + \int_{\varphi_1(t_0)}^{\varphi_3(t_0)} F_t(y,t_0)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\varphi_1(t_0)}^{\varphi_3(t_0)} F_t(y,t_0)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

所以 $I'(t_0)<0$ 可替换成

$$\int_{\varphi_1(t_0)}^{\varphi_3(t_0)} F_t(y,t_0)\,\mathrm{d}y < 0.$$

注释 5.1　方程 (5.28) 可以有几个解, 这就说明可以同时出现若干个转移点. 如果方程 (5.28) 没有解, 那么就不会产生阶梯状空间对照结构.

注释 5.2　条件 $I'(t_0)<0$ 只保证 $t=t_0$ 是单根. 如果 $t=t_0$ 是重根, 那么转移点要用其他办法求, 在此不作介绍.

注释 5.3　条件 $I'(t_0)$ 取负号是因为后面用微分不等式证明解的存在性时方法上的需要, 对 (5.28) 而言, 只要 $I(t_0)\neq 0$ 就行了.

边界层函数法的一个重要特点是所有的边界层函数都是指数衰减的, 这在证明 (5.1), (5.2) 解的存在性时还要用到.

引理 5.1 如果满足条件 $[\mathrm{H}_{5.1}]$—$[\mathrm{H}_{5.3}]$, 则右内部层函数有下面指数估计

$$C_1 \mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0 \tau} \leqslant Q_0^{(+)} y(\tau) \leqslant C_2 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau}, \quad \overline{\kappa}_0 > 0,\ \underline{\kappa}_0 > 0,$$
$$C_3 \mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0 \tau} \leqslant Q_0^{(+)} z(\tau) \leqslant C_4 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau}, \quad 0 \leqslant \tau < \infty,$$

其中 $C_i (i=1,2,3,4)$ 和 $\underline{\kappa}_0$, $\overline{\kappa}_0$ 都是常数.

证明 在 $\tilde{y} = \varphi_3(0)$ 邻域 $\tilde{z}$ 可展开成

$$\begin{aligned}\tilde{z}(\tilde{y}) &= \tilde{z}(\varphi_3(0)) + \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tilde{y}}(\varphi_3(0))(\tilde{y} - \varphi_3(0)) + o(\tilde{y} - \varphi_3(0)) \\ &= \lambda_2^{(3)}(\tilde{y} - \varphi_3(0)) + o(\tilde{y} - \varphi_3(0)).\end{aligned}$$

注意到 $\lambda_2^{(3)} < 0$, 而 $\varphi_2(0) \leqslant \tilde{y} < \varphi_3(0)$, 所以对充分大的 $\tau > \tau^*$(τ^* 为某个固定的值), 存在正常数 $\underline{\kappa}_0 = -\lambda_2^{(3)} - \delta$, $\overline{\kappa}_0 = -\lambda_2^{(3)} + \delta$ (δ 任意小) 有

$$-\underline{\kappa}_0(\tilde{y} - \varphi_3(0)) \leqslant \tilde{z} \leqslant -\overline{\kappa}_0(\tilde{y} - \varphi_3(0)),$$

或者

$$-\underline{\kappa}_0 Q_0^{(+)} y(\tau) \leqslant \frac{\mathrm{d}Q_0^{(+)} y}{\mathrm{d}\tau} \leqslant -\overline{\kappa}_0 Q_0^{(+)} y(\tau). \tag{5.29}$$

对 (5.29) 两边从 τ^* 到 τ 进行积分

$$|Q_0^{(+)} y(\tau^*)| \mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0(\tau - \tau^*)} \leqslant Q_0^{(+)} y(\tau) \leqslant |Q_0^{(+)} y(\tau^*)| \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0(\tau - \tau^*)},$$

即

$$C_1 \mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0 \tau} \leqslant Q_0^{(+)} y(\tau) \leqslant C_2 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau}, \tag{5.30}$$

其中 $C_1 = |Q_0^{(+)} y(\tau^*)| \mathrm{e}^{\overline{\kappa}_0 \tau^*}$, $C_2 = |Q_0^{(+)} y(\tau^*)| \mathrm{e}^{\underline{\kappa}_0 \tau^*}$. 再从 (5.29) 可得对 $Q_0^{(+)} z = \dfrac{\mathrm{d}Q_0^{(+)} y}{\mathrm{d}\tau}$ 的估计, 即

$$-\underline{\kappa}_0 C_1 \mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0 \tau} \leqslant Q_0^{(+)} z(\tau) \leqslant -\overline{\kappa}_0 C_2 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau},$$

或者

$$C_3 \mathrm{e}^{-\overline{\kappa}_0 \tau} \leqslant Q_0^{(+)} z(\tau) \leqslant C_4 \mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0 \tau},$$

其中 $C_3 = -\underline{\kappa}_0 C_1$, $C_4 = -\overline{\kappa}_0 C_2$, 而 $C_i (i=1,2,3,4)$ 是只依赖于 τ^* 而与 μ 无关的常数. □

对 $Q_0^{(-)} y$, $Q_0^{(-)} z$ 也有类似结论.

引理 5.2　如果满足条件 $[H_{5.1}]$—$[H_{5.3}]$, 则左内部层函数也有下面指数估计

$$C_5 e^{\overline{\kappa}_0 \tau} \leqslant Q_0^{(-)} y(\tau) \leqslant C_6 e^{\underline{\kappa}_0 \tau},$$
$$C_7 e^{\overline{\kappa}_0 \tau} \leqslant Q_0^{(-)} z(\tau) \leqslant C_8 e^{\underline{\kappa}_0 \tau}, \quad -\infty < \tau < 0,$$

其中 $C_i(i=5,6,7,8)$ 和 $\overline{\kappa}_0$, $\underline{\kappa}_0$ 都是与 μ 无关的常数. 这里的正常数 $\overline{\kappa}_0$, $\underline{\kappa}_0$ 和引理 5.1 中 $\overline{\kappa}_0$, $\underline{\kappa}_0$ 一般来说是不同的, 本文只是采用同一个记法而已.

这样, 我们就求得了 t_0, $Q_0^{(\mp)}y$, $Q_0^{(\mp)}z$. 但是为了得到一致有效的零次渐近表达式, 对转移点 t^* 必须展开到 $t^* = t_0 + t_1\mu + O(\mu^2)$. 这是因为, 如果 $t^* - t_0 = O(\mu)$, 则 $Q_0^{\mp} y(\tau) = Q_0^{\mp} y(O(1))$ 在离开内部层时非指数衰减. 而确定 t_1 是同 $\bar{y}_1^{(\mp)}$, $Q_1^{(\mp)}y$, $Q_1^{(\mp)}z$ 紧密联系的.

不难求得 $\bar{y}_1^{(\mp)} = 0$. 确定 $Q_1^{(\mp)}y, Q_1^{(\mp)}z$ 的方程和边值为

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau} Q_1^{(\mp)} z = \tilde{F}_y Q_1^{(\mp)} y + h_1^{(\mp)}, \quad \dfrac{d}{d\tau} Q_1^{(\mp)} y = Q_1^{(\mp)} z, & (5.31) \\ Q_1^{(\mp)} y(0) = (\varphi_2'(t_0) - \varphi_{1,3}'(t_0)) t_1, \\ Q_1^{(\mp)} y(\mp\infty) = 0, \quad Q_1^{(\mp)} z(\mp\infty) = 0, & (5.32) \end{cases}$$

这里 $h_1^{(\mp)} = \tilde{F}_y^{(\mp)} \varphi_{3,1}'(t_0)(t_1+\tau) + \tilde{F}_t^{(\mp)}(t_1+\tau)$, "~" 表示函数在点 $(\varphi_{1,3}(t_0) + Q_0^{(\mp)} y(0), t_0)$ 取值.

问题 (5.31), (5.32) 的解有下面表达式, 这可代入直接验证

$$Q_1^{(\mp)} y = Q_1^{(\mp)} y(0) \frac{\tilde{z}(\tau)}{\tilde{z}(0)} + \tilde{z}(\tau) \int_0^\tau \frac{d\eta}{\tilde{z}^2(\eta)} \int_{(\mp)\infty}^\eta \tilde{z}(\sigma) h_1^{(\mp)}(\sigma)\, d\sigma,$$
$$Q_1^{(\mp)} z = \frac{d\tilde{z}}{d\tau} \Big[\frac{Q_1^{(\mp)} y(0)}{\tilde{z}(0)} + \int_0^\tau \frac{d\eta}{\tilde{z}^2(\eta)} \int_{\mp\infty}^\eta \tilde{z}(\sigma) h_1^{(\mp)}(\sigma)\, d\sigma \Big]$$
$$+ z^{-1}(\tau) \int_{\mp\infty}^\tau \tilde{z}(\sigma) h_1^{(\mp)}(\sigma)\, d\sigma. \quad (5.33)$$

为了确定 t_1, 把 (5.33) 代入 (5.20) 并考虑到 $\dfrac{d\tilde{z}}{d\tau}(0) = F(\varphi_2(t_0), t_0) = 0$, 可得

$$\varphi_1'(t_0) + \tilde{z}^{-1}(0) \int_{-\infty}^0 \tilde{z}(\sigma) h_1^{(-)}(\sigma)\, d\sigma = \varphi_3'(t_0) + \tilde{z}^{-1}(0) \int_{+\infty}^0 \tilde{z}(\sigma) h_1^{(+)}(\sigma)\, d\sigma. \quad (5.34)$$

对 (5.34) 式通过分部积分并合并同类项可得

$$t_1 \int_{\varphi_3}^{\varphi_1} F_t(y, t_0)\, dy - \int_{\varphi_3}^{\varphi_1} F_t(y, t_0) \Big(\int_{\varphi_2}^{\tilde{y}} \big(2 \int_{\varphi_3}^{y} F(y, t_0)\, dy\big)^{-\frac{1}{2}} dy \Big) dy = 0, \quad (5.35)$$

根据 $[H_{5.3}]$ 可惟一求得 t_1.

注释 5.4　在 (5.35) 的内积分中 φ_3 也可换成 φ_1.

对 $Q_1^{(\mp)}y$ 也有类似于 $Q_0^{(\mp)}y$ 的指数估计, 在此不做证明引入.

引理 5.3 如果满足条件 $[H_{5.1}]$—$[H_{5.3}]$, 则有下面指数估计式

$$|Q_1^{(-)}y| \leqslant C_9 e^{\underline{\kappa}_1\tau}, \quad |Q_1^{(-)}z| \leqslant C_{10} e^{\underline{\kappa}_1\tau}, \quad -\infty < \tau < 0,$$
$$|Q_1^{(+)}y| \leqslant C_{11} e^{-\underline{\kappa}_1\tau}, \quad |Q_1^{(+)}z| \leqslant C_{12} e^{-\underline{\kappa}_1\tau}, \quad 0 < \tau < \infty,$$

这里 $C_i(i=9,10,11,12)$ 是不依赖于 μ 的常数, $\tau_1 < \tau_0$.

5.1.3 转移点 t^* 的确定和细化

引理 5.4 如果满足条件 $[H_{5.1}]$—$[H_{5.3}]$, 那么转移点 t^* 存在且有下面渐近表达式

$$t^* = t_0 + O(\mu).$$

证明 重新回到左右问题. 现在把 t^* 看作参数, 在构造渐近解时它的作用跟 t_0 一样.

根据上节构造渐近展开式的方法可得

$$z^{(-)}(t,\mu) = Q_0^{(-)}z(\tau) + O(\mu), \quad t < t^*,$$

$$z^{(+)}(t,\mu) = Q_0^{(+)}z(\tau) + O(\mu), \quad t > t^*,$$

其中 $\tau = (t - t^*)/\mu$.

这时光滑连接的条件 (5.8) 可写成

$$Q_0^{(-)}z(0) + O(\mu) = Q_0^{(+)}z(0) + O(\mu)$$

或者

$$[Q_0^{(-)}z(0)]^2 + O(\mu) = [Q_0^{(+)}z(0)]^2 + O(\mu). \tag{5.36}$$

等式 (5.36) 两边的 $O(\mu)$ 一般来说是不一样的, $O(\mu)$ 仅表示关于 μ 的量阶.

记

$$\begin{aligned} G(t^*,\mu) &= [Q_0^{(-)}z(0)]^2 - [Q_0^{(+)}z(0)]^2 + O(\mu) \\ &= \int_{\varphi_1(t^*)}^{\varphi_3(t^*)} F(y,t^*)\,\mathrm{d}y + O(\mu) \\ &= I(t^*) + O(\mu). \end{aligned}$$

假设 $t^* = t_0 \pm K\mu$, 这里 t_0 由 $[H_{5.3}]$ 所确定, K 是某个正数. 因为

$$\begin{aligned} G(t_0 \pm K\mu,\mu) &= I(t_0 \pm K\mu) + O(\mu) \\ &= \pm I'(t_0 + \theta_{(\pm)}K\mu)K\mu + O(\mu), \quad 0 < \theta_{(\pm)} < 1. \end{aligned}$$

根据保号性, 当 μ 相当小时, $I'(t_0 \pm \theta_{(\pm)} K\mu)$ 与 $I'(t_0)$ 同号. 再取 K 充分大, 一定能做到 $G(t_0 \pm K\mu, \mu)$ 异号. 由根的存在定理, 存在 $t^* \in (t_0 - K\mu, t_0 + K\mu)$ 有 $G(t^*, \mu) = 0$. 显然 $t^* = t_0 + O(\mu)$. □

定理 5.1 (极限转移定理) 如果满足条件 [H$_{5.1}$]—[H$_{5.3}$], 问题 (5.1), (5.2) 存在具有阶梯状解 $y(t, \mu)$, 并且有下面极限过程

$$\lim_{\mu \to 0} y(t, \mu) = \begin{cases} \varphi_1(t), & 0 < t < t_0, \\ \varphi_3(t), & t_0 < t < 1. \end{cases}$$

注释 5.5 如果只是证明极限转移定理, 那么光滑性条件 [H$_{5.1}$] 可以减弱, 仅要求 F 存在连续的一阶导数即可.

注释 5.6 可进一步得到 t^* 的一阶渐近展开式:

$$t^* = t_0 + \mu t_1 + O(\mu^2). \tag{5.37}$$

下面将证明渐近展开式 (5.37) 的正确性. 假设

$$t^* = t_0 + \mu t_1^*, \tag{5.38}$$

其中 t_0 已由引理 5.1 所确定, 只有 t_1^* 是参数.

t_1^* 的确定是同 $Q_1^{(\mp)} y$, $Q_1^{(\mp)} z$ 紧密相关的. $Q_1^{(\mp)} y, Q_1^{(\mp)} z$ 同样满足问题 (5.31), (5.32), 只要把原来的 t_1 换成 t_1^* 即可.

这时把光滑连接条件 (5.8) 展开到一次近似

$$\begin{aligned} & Q_0^{(-)} z(0) + \mu(\varphi_1'(t_0) + Q_1^{(-)} z(0)) + O(\mu^2) \\ = & Q_0^{(+)} z(0) + \mu(\varphi_3'(t_0) + Q_1^{(+)} z(0)) + O(\mu^2), \end{aligned} \tag{5.39}$$

考虑到 (5.19), 在方程 (5.39) 两边约去 μ 可得

$$\varphi_1'(t_0) + Q_1^{(-)} z(0) + O(\mu) = \varphi_1'(t_0) + Q_1^{(+)} z(0) + O(\mu). \tag{5.40}$$

完全类似于 (5.34), (5.35) 的做法化简 (5.40) 求得

$$t_1^* = t_1 + O(\mu). \tag{5.41}$$

把 (5.41) 代入 (5.38) 就得到了 t^* 的一次渐近表达式 (5.37). 把转移点 t^* 展开式关于 μ 的量阶从零次近似提高到一次近似称为细化.

5.1.4 阶梯状解的存在性和余项估计

对问题 (5.1), (5.2) 的解的存在性证明, 可以有不同的方法. 在此采用微分不等式进行证明有两个目的: 一是为了让读者对空间对照结构的几何特征有个直观体验,

二是在比较复杂的情况下品味构造上下解的技巧. 往下将用 Nagumo 定理来证明问题 (5.1), (5.2) 的解和零次渐近解的存在性, 并进行余项估计. 为此需要构造合适的上下解 α, β. 该问题上下解的构造比纯边界层情况要复杂的多, 因为它们都是分段光滑函数.

这里将给出构造上下解的标准方法, 以便同行们方便使用.

我们取上解为下面形式:

$$\beta_0=\begin{cases}\varphi_1(t)+Q_{0\beta}^{(-)}y(\tau_\beta)+\mu Q_{1\beta}^{(-)}y(\tau_\beta)+\mu, & 0\leqslant t\leqslant t_\beta,\\ \varphi_3(t)+Q_{0\beta}^{(+)}y(\tau_\beta)+\mu Q_{1\beta}^{(+)}y(\tau_\beta)+\mu, & t_\beta\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

其中 $t_\beta=t_0-\delta\mu$, $\tau_\beta=(t-t_\beta)/\mu$, δ 为某个正参数, 它在验证 Nagumo 条件的过程中选取.

函数 $Q_{0\beta}^{(\mp)}y$, $Q_{1\beta}^{(\mp)}y$ 分别满足下面的方程和边值

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2Q_{0\beta}^{(\mp)}y}{\mathrm{d}\tau_\beta^2}=F(\varphi_{1,3}^{(\mp)}(t_\beta)+Q_{0\beta}^{(\mp)}y(\tau_\beta),t_\beta),\\ Q_{0\beta}^{(\mp)}y(0)=\varphi_2(t_\beta)-\varphi_{1,3}(t_\beta),\quad Q_{0\beta}^{(\mp)}y(\mp\infty)=0.\end{cases}\tag{5.42}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2Q_{1\beta}^{(\mp)}y}{\mathrm{d}\tau_\beta^2}=\tilde{F}_{y\beta}^{(\mp)}Q_{1\beta}^{(\mp)}y(\tau_\beta)+h_{1\beta}^{(\mp)}(\tau_\beta)+\psi_{1\beta}^{(\mp)}(\tau_\beta),\\ Q_{1\beta}^{(\mp)}y(0)=(\varphi_2'(t_0)-\varphi_{1,3}'(t_0))t_1,\quad Q_{1\beta}^{(\mp)}y(\mp\infty)=0.\end{cases}\tag{5.43}$$

其中

$$h_{1\beta}^{(\mp)}(\tau_\beta)=\tilde{F}_{y\beta}^{(\mp)}\varphi_{3,1}'^{(\mp)}(t_\beta)\tau_\beta+\tilde{F}_{t\beta}^{(\mp)}\tau_\beta,\quad \psi_{1\beta}^{(\mp)}(\tau_\beta)=-\omega\mathrm{e}^{\pm\kappa_0\tau_\beta}.$$

问题 (5.42) 和 (5.43) 与问题 (5.21) 和 (5.32) 的区别在于把 t_0 换成了 t_β.

可这样构造下解 α_0:

$$\alpha_0=\begin{cases}\varphi_1(t)+Q_{0\alpha}^{(-)}y(\tau_\alpha)+\mu Q_{1\alpha}^{(-)}y(\tau_\alpha)-\mu, & 0\leqslant t\leqslant t_\alpha,\\ \varphi_3(t)+Q_{0\alpha}^{(+)}y(\tau_\alpha)+\mu Q_{1\alpha}^{(+)}y(\tau_\alpha)-\mu, & t_\alpha\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

其中 $t_\alpha=t_0+\delta\mu$, $\tau_\alpha=(t-t_\alpha)/\mu$, $Q_{i\alpha}^{(\mp)}y$ 与 $Q_{i\beta}^{(\mp)}y\,(i=0,1)$ 的不同在于把 t_β 换成 t_α, 而 $\psi_{1\alpha}^{(\mp)}=\omega\mathrm{e}^{\pm\kappa_0\tau_\alpha}$.

注释 5.7 为了讨论方便起见, 不妨认为 $\dfrac{1}{3}<t_\beta,t_\alpha<\dfrac{2}{3}$.

不难看出 $Q_{i\beta}^{(\mp)}y$, $Q_{i\alpha}^{(\mp)}y\,(i=0,1)$ 和自己的导数仍有指数式估计. 我们把 $[0,1]$ 分成三个子区间 $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$, $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$, $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$, 并将在每个子区间上验证 Nagumo 条件成立. 需要指出的是在 $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ 和 $[\frac{2}{3},1]$ 上 $Q_{i\beta}y\,(i=0,1)$ 和它的导数都是指数小.

首先验证 Nagumo 条件 (1). 在 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 上 $\beta_0-\alpha_0=2\mu+NST>0$(NST 为指数小). 为了在 $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ 上进行验证, 需要把它再拆成三部分: $\left[\frac{1}{3},t_\beta\right]$, $[t_\beta,t_\alpha]$, $\left[t_\alpha,\frac{2}{3}\right]$. 往下只在 $\left[\frac{1}{3},t_\beta\right]$ 和 $[t_\beta,t_\alpha]$ 上进行验证, 而在 $\left[t_\alpha,\frac{2}{3}\right]$ 上的讨论与在 $\left[\frac{1}{3},t_\beta\right]$ 上的讨论是完全类似的.

在区间 $[t_\beta,t_\alpha]$ 上

$$
\begin{aligned}
\beta_0-\alpha_0&=\varphi_3(t)-\varphi_1(t)+Q_{0\beta}^{(+)}y(\tau_\beta)-Q_{0\alpha}^{(-)}y(\tau_\alpha)+\mu[Q_{1\beta}^{(+)}y(\tau_\beta)-Q_{1\alpha}^{(-)}y(\tau_\alpha)]+2\mu\\
&=\varphi_3(t_\beta)-\varphi_1(t_\alpha)+Q_{0\beta}^{(+)}y(\tau_\beta)-Q_{0\alpha}^{(-)}y(\tau_\alpha)+2\mu=\tilde{y}_\beta^{(+)}-\tilde{y}_\alpha^{(-)}+2\mu>0,
\end{aligned}
$$

这里的 $\tilde{y}_\beta^{(+)},\tilde{y}_\alpha^{(-)}$ 类似于 (5.23) 的记法.

在区间 $\left[\frac{1}{3},t_\beta\right]$ 上的讨论需要把它再分成二部分 $\left[\frac{1}{3},\hat{t}\right]$ 和 $[\hat{t},t_\beta]$, 其中 $\hat{t}$ 按需要适当选择.

在 $[\hat{t},t_\beta]$ 上

$$
\beta_0-\alpha_0=2\mu+Q_{0\beta}^{(-)}y(\tau_\beta)-Q_{0\alpha}^{(-)}y(\tau_\alpha)+\mu[Q_{1\beta}^{(-)}y(\tau_\beta)-Q_{1\alpha}^{(-)}y(\tau_\alpha)], \tag{5.44}
$$

为了确定 (5.44) 的符号需要用到下面两个不等式

$$
\frac{1}{2}(Q_{0\beta}^{(-)}y-Q_{0\alpha}^{(-)}y)>|\mu Q_{1\beta}^{(-)}y|,\quad \frac{1}{2}(Q_{0\beta}^{(-)}y-Q_{0\alpha}^{(-)}y)>|\mu Q_{1\alpha}^{(-)}y|. \tag{5.45}
$$

这是因为

$$
Q_{0\beta}^{(-)}y(\tau_\beta)-Q_{0\alpha}^{(-)}y(\tau_\alpha)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Q_0^{(-)}y(\tau^*)2\delta,\quad \tau_\alpha\leqslant\tau^*\leqslant\tau_\beta.
$$

考虑到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Q_0^{(-)}y(\tau^*)>C_7\mathrm{e}^{\bar{\kappa}_0\tau_\alpha}$, $Q_{1\beta}^{(-)}y(\tau_\beta)<C_9\mathrm{e}^{\underline{\kappa}_1\tau_\beta}$. 为了使 (5.45) 第一式成立只要

$$
\tau_\beta>\frac{1}{\bar{\kappa}_0-\underline{\kappa}_1}\ln\frac{\mu C_9}{C_7\delta\mathrm{e}^{-2\bar{\kappa}_0\delta}}=\hat{\tau}.
$$

类似地为了使 (5.45) 第二式成立需要

$$
\tau_\beta>\frac{1}{\bar{\kappa}_0-\underline{\kappa}_1}\ln\frac{\mu C_9}{C_7\delta}\mathrm{e}^{-2(\bar{\kappa}_0-\underline{\kappa}_1)\delta}=\hat{\tau}+\ln\frac{C_{1\alpha}}{C_9}\mathrm{e}^{-2\delta\underline{\kappa}_1}.
$$

当 δ 充分大时, $\ln\frac{C_{1\alpha}}{C_{1\beta}}\mathrm{e}^{-2\delta\underline{\kappa}_1}$ 为负. 这样, 当 $\tau_\beta>\hat{\tau}$ 或者 $t>\hat{t}=\hat{\tau}\mu+t_0-\delta$ 时, 保证了 (5.45) 成立.

由此可得, 当 δ 充分大时, $\beta_0>\alpha_0$.

至于在区间 $\left[\frac{1}{3},\hat{t}\right]$ 上, 显然 $Q_{0\beta}^{(-)}y-Q_{0\alpha}^{(-)}y>0$, 因为 $|\mu Q_{1\beta}^{(-)}y|$, $|\mu Q_{1\alpha}^{(-)}y|$ 均为指数小. 结果对充分大的 δ, 在 $\left[\frac{1}{3},\hat{t}\right]$ 上 $\beta_0>\alpha_0$ 成立. 最终在 $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ 上验证了 Nagumo 条件 (1).

下面验证 Nagumo 条件 (2). 在 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 上 $\beta_0=\varphi_{1,3}(t)+\mu+NST$, 所以

$$
\begin{aligned}
L\beta_0 &= \mu^2\varphi''_{1,3}(t)-F(\varphi_{1,3}(t)+\mu+NST,t)+NST\\
&= -F_y(\varphi_{1,3}(t),t)\mu+O(\mu^2)<0.
\end{aligned}
$$

我们把 $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ 分成两部分 $\left[\frac{1}{3},t_\beta\right]$, $\left[t_\beta,\frac{2}{3}\right]$, 往下只对在 $\left[\frac{1}{3},t_\beta\right]$ 上证明 $L\beta_0<0$, 而在 $\left[t_\beta,\frac{2}{3}\right]$ 上的证明是相同的.

$$
\begin{aligned}
L\beta_0 &= \mu^2\frac{\mathrm{d}^2\beta_0}{\mathrm{d}t^2}-F(\beta_0,t)\\
&= \mu^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\varphi_1(t)+\mu)+\frac{\mathrm{d}^2Q_{0\beta}^{(-)}y}{\mathrm{d}\tau^2}+\mu\frac{\mathrm{d}^2Q_{1\beta}^{(-)}y}{\mathrm{d}\tau^2}\\
&\quad -F(\varphi_1(t)+\mu+Q_{0\beta}^{(-)}y+\mu Q_{1\beta}^{(-)}y,t)+NST,
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

把 F 表示成 $F=\tilde{F}(\mu)+\bar{F}(\mu)$, 其中

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(\mu) &= F(\varphi_1(\tau\mu)+\mu+Q_{0\beta}^{(-)}y+\mu Q_{1\beta}^{(-)}y,\tau\mu)-F(\varphi_1(\tau\mu)+\mu,\tau\mu),\\
\bar{F}(\mu) &= F(\varphi_1(t)+\mu,t).
\end{aligned}
$$

对 $\tilde{F}(\mu)$, $\bar{F}(\mu)$ 进行泰勒展开

$$
\tilde{F}(\mu)=\frac{\mathrm{d}^2Q_{0\beta}^{(-)}y}{\mathrm{d}\tau^2}+\mu\Big[\frac{\mathrm{d}^2Q_{1\beta}^{(-)}y}{\mathrm{d}\tau^2}-\omega\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0\tau}\Big]+O(\mu^2),
\tag{5.47}
$$

$$
\bar{F}(\mu)=F_y(\varphi_1(t),t)\mu+O(\mu^2),\quad 0<\theta_2<1.
\tag{5.48}
$$

现在对 $L\beta_0$ 进行估计, 把 (5.47), (5.48) 代入 (5.46) 可得

$$
L\beta_0=O(\mu^2)+\mu\omega\mathrm{e}^{-\underline{\kappa}_0\tau}-\mu F_y(\varphi_1(t),t).
$$

显见 $L\beta_0$ 的符号由 $-\mu F_y$ 决定, 根据 $[\mathrm{H}_{5.2}]$ 可得 $L\beta_0<0$.

用同样的方法可以证明 $L\alpha_0>0$, $0<t<1$.

Nagumo 条件 (3) 的验证是显然的. 最后验证 Nagumo 条件 (4). 先考虑上解 β_0 在间断点 t_β 处 $\left[\frac{\mathrm{d}\beta_0}{\mathrm{d}t}\right]_{(+)}^{(-)}$ 的符号

$$
\begin{aligned}
\mu\frac{\mathrm{d}\beta_0}{\mathrm{d}t}(t_{\beta-})-\mu\frac{\mathrm{d}\beta_0}{\mathrm{d}t}(t_{\beta+}) &= \mu\left[\frac{\mathrm{d}\beta_0}{\mathrm{d}t}\right]_{(+)}^{(-)}\\
&= \left[\mu\bar{y}_0'(t_{\beta_0})+\frac{\mathrm{d}Q_{0\beta}y}{\mathrm{d}\tau_\beta}+\mu\frac{\mathrm{d}Q_{1\beta}y}{\mathrm{d}\tau_\beta}\right]_{(+)}^{(-)}=\left[\frac{\mathrm{d}Q_{0\beta}y}{\mathrm{d}\tau_\beta}\right]_{(+)}^{(-)}+O(\mu).
\end{aligned}
\tag{5.49}
$$

类似于 (5.21)—(5.28) 的做法

$$\left[\frac{\mathrm{d}Q_{0\beta}y}{\mathrm{d}\tau_\beta}\right]_{(+)}^{(-)}=\int_{\varphi_1(t_\beta)}^{\varphi_3(t_\beta)}F(y,t_\beta)\,\mathrm{d}y=I(t_\beta)$$
$$=I(t_0)-I'(t_0)\delta\mu+O(\delta^2\mu^2)$$
$$=-I'(t_0)\delta\mu+O(\delta^2\mu^2).$$

把上式代入 (5.49)

$$\mu\left[\frac{\mathrm{d}\beta_0}{\mathrm{d}t}\right]_{(+)}^{(-)}=-I'(t_0)\delta\mu+O(\delta^2\mu^2)+O(\mu). \tag{5.50}$$

对充分大的 $\delta>0$ 但固定 (δ 不依赖于 μ), 当 $\mu\to 0$ 时, 根据 $[\mathrm{H}_{5.3}]$ 表达式 (5.50) 是正的.

对下解 α_0 在间断点 t_α 处检验 Nagumo 条件 (4) 是完全类似. 这样根据 Nagumo 定理问题 (5.1), (5.2) 的解 $y(t,\mu)$ 是存在的.

但是为了得到余项是 $O(\mu)$ 的渐近解, 需要把转移点和上下解都展开到 $O(\mu^2)$. 为此需这样构造上解 β_1:

$$\beta_1=\begin{cases}\beta_1^{(-)}=\varphi_1(t)+Q_{0\beta}^{(-)}y(\tau_\beta)+\mu Q_{1\beta}^{(-)}y(\tau_\beta)+\mu^2(\bar{y}_2^{(-)}(t)+1)+\mu^2Q_{2\beta}^{(-)}y, & 0\leqslant t\leqslant t_\beta,\\ \beta_1^{(+)}=\varphi_3(t)+Q_{0\beta}^{(+)}(\tau_\beta)+\mu Q_{1\beta}^{(+)}y(\tau_\beta)+\mu^2(\bar{y}_2^{(+)}(t)+1)+\mu^2Q_{2\beta}^{(+)}y, & t_\beta\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

其中 $t_\beta=t_0+\mu t_1-\mu^2\delta$. 下解 α_1 的构造是类似的. $Q_{i\beta}^{(\mp)}y\,(i=0,1)$ 的确定如同 $Q_i^{(\mp)}y$, 只是把自变量 τ 替换成 $\tau_\beta=[t-(t_0+\mu t_1-\delta\mu^2)]/\mu$, 但 $Q_{2\beta}^{(\mp)}y$ 是相应问题的解, 其中在 $h_{2\beta}^{(\mp)}$ 中 $\psi_{2\beta}^{(\mp)}=\mp\omega\mathrm{e}^{\pm\kappa_0\tau_\beta}$.

对 β_1,α_1 检验 Nagumo 条件基本上同 β_0,α_0 一样, 只有下面两处略有不同:

第一, 在验证条件 (1) 时, 在 $\left[\frac{1}{3},t_\beta\right]$ 上

$$\beta_1-\alpha_1=2\mu+Q_{0\beta}^{(-)}y-Q_{0\alpha}^{(-)}y+\mu(Q_{1\beta}^{(-)}y-Q_{1\alpha}^{(-)}y)+\mu^2(Q_{2\beta}^{(-)}y-Q_{2\alpha}^{(-)}y).$$

为了证明 $\beta_1-\alpha_1>0$. 需要用到下面三个不等式

$$\frac{1}{3}(Q_{0\beta}^{(-)}y-Q_{0\alpha}^{(-)}y)>|\mu^2Q_{2\beta}^{(-)}y|,$$
$$\frac{1}{3}(Q_{0\beta}^{(-)}y-Q_{0\alpha}^{(-)})y>|\mu^2Q_{2\alpha}^{(-)}y|,$$
$$\frac{1}{3}(Q_{0\beta}^{(-)}y-Q_{0\alpha}^{(-)}y)>\mu|Q_{1\beta}^{(-)}y-Q_{1\alpha}^{(-)}y|.$$

它们的证明跟上下解是 β_0,α_0 时基本一样.

第二, 在间断点 t_β 处

$$\mu\left[\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right]_{(+)}^{(-)}=-\delta\mu^2I'(t_0)+O(\mu^2)>0.$$

这样, 由 Nagumo 定理不但能证明 (5.1), (5.2) 解的存在性, 而且能写出 $y(t,\mu)$ 的零阶渐近表达式:

$$y(t,\mu)=\begin{cases}\varphi_1(t)+Q_0^{(-)}y(\tau)+O(\mu), & 0\leqslant t\leqslant t_0+\mu t_1+O(\mu^2),\\ \varphi_3(t)+Q_0^{(+)}y(\tau)+O(\mu), & t_0+\mu t_1+O(\mu^2)\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}\tag{5.51}$$

把上述讨论最终归结为下面定理

定理 5.2 如果满足条件 $[H_{5.1}]$—$[H_{5.3}]$, 那么对足够小的 $\mu>0$, 存在 $t^*=t_0+t_1\mu+O(\mu)$, 使得在区间 $[0,t^*]$ 上存在 (5.4) 的解 $y^{(-)}(t,\mu)$, 在区间 $[t^*,1]$ 上存在 (5.6) 解 $y^{(+)}(t,\mu)$, 它们在 t^* 处光滑连接, 并且有渐近表达式 (5.51).

注释 5.8 可以把对 β_0, α_0 和 β_1, α_1 的讨论可推广到 α_{n+1}, β_{n+1}, 这时不但同样可以证明解的存在性, 还可以得到解的 n 阶渐近表达式.

5.2 弱非线性问题中的阶梯状解

5.2.1 阶梯状解的存在性

我们将讨论下面的二阶方程和给定的边值条件 [9]

$$\begin{cases}\mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F(\mu\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},y,t), & (5.52)\\ y(-1,\mu)=y(1,\mu)=0,\quad |t|<1, & (5.53)\end{cases}$$

其中 $\mu>0$ 是小参数. 由于方程右端包含了一阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 所以问题会相当复杂.

把 (5.52) 写成等价方程组

$$\begin{cases}\mu\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z,\\ \mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=F(z,y,t).\end{cases}\tag{5.54}$$

$[H_{5.4}]$ 假设 $F(z,y,t)$ 在区域 $D=\{(z,y,t)|\ |t|<1,|y|\leqslant l_1,|z|\leqslant l_2\}$ 上二阶偏导连续, 而 l_1,l_2 是两个给定的常数.

$[H_{5.5}]$ 假设 $F(0,y,t)=0$ 有三个根 $y=\varphi_i(t)(i=1,2,3)$, 不妨令 $\varphi_1(t)<\varphi_2(t)<\varphi_3(t)$. 并且 $F_y(\varphi_{1,3})>0$, $F_y(\varphi_2)<0$.

写出 (5.54) 的辅助方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{z},\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau}=F(\tilde{z},\tilde{y},t),\end{cases}\tag{5.55}$$

其中 t 是参数.

在相平面 $(\tilde{y},\tilde{z})$ 上平衡点 $M_{1,3}(\varphi_{1,3},0)$ 是鞍点, 这是因为特征方程

$$\begin{vmatrix} F_z(0,\varphi,t)-\lambda & F_y(0,\varphi,t) \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix}=0$$

或者

$$\lambda^2-F_z(0,\varphi,t)\lambda-F_y(0,\varphi,t)=0$$

有两个异号的实根. 记判别式 $\Delta=F_z^2(0,\varphi,t)+4F_y(0,\varphi,t)$.

当 $\varphi=\varphi_{1,3}$ 时,

$$\Delta=F_z^2(0,\varphi_{1,3},t)+4F_y(0,\varphi_{1,3},t)>0,\quad \lambda_1\lambda_2=-F_y(0,\varphi_{1,3},t)<0.$$

当 $\varphi=\varphi_2$ 时,

$$\Delta=F_z^2(0,\varphi_2,t)+4F_y(0,\varphi_2,t),\quad \lambda_1\lambda_2=-F_y(0,\varphi_2,t)>0.$$

这时, 如果 $F_z(0,\varphi_2(t),t)\neq 0$, $M_2(\varphi_2(t),t)$ 可以是焦点, 经过每一个鞍点 $M_{1,3}$ 有两条轨线进出, 其中一条可以进入焦点 (或走出) M_2. 本文将不讨论连接鞍焦点的轨线.

[$H_{5.6}$] 假设从 M_1 出发的轨线 (记为 $\tilde{z}^{(-)}(\tau,t)$, $\tilde{y}^{(-)}(\tau,t)$) 与 $y=\varphi_2(t)$ 相交, 并且在交点时刻对应于 $\tau=0$, 在 M_1 处对应于 $\tau=-\infty$; 又进入 M_3 的轨线 (记为 $\tilde{z}^{(+)}(\tau,t)$, $\tilde{y}^{(+)}(\tau,t)$) 与 $y=\varphi_2(t)$ 相交, 在交点时刻对应于 $\tau=0$, 在 M_3 处对应于 $\tau=+\infty$.

这两条轨线由下面方程确定

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}^{(\mp)}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{z}^{(\mp)},\quad \dfrac{\mathrm{d}\tilde{z}^{(\mp)}}{\mathrm{d}\tau}=F(\tilde{z}^{(\mp)},\tilde{y}^{(\mp)},t), \\ \tilde{y}^{(\mp)}(0,t)=\varphi_2(t), \\ \tilde{y}^{(\mp)}(\pm\infty,t)=\varphi_{1,3}(t),\ \tilde{z}^{(\mp)}(\pm\infty,t)=0. \end{cases}\tag{5.56}$$

记 $H(t)=\tilde{z}^{(+)}(0,t)-\tilde{z}^{(-)}(0,t)$.

[$H_{5.7}$] 假设对某个 $t=t_0$, $-1<t_0<1$, 有 $H(t_0)=0$, 但 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0}\neq 0$.

定理 5.3 如果满足条件 [$H_{5.4}$]—[$H_{5.7}$], 则必存在问题 (5.52), (5.53) 的解 $y(t,\mu)$, 并有下面极限过程

$$\lim_{\mu\to 0}y(t,\mu)=\begin{cases}\varphi_1(t),\ t<t_0,\\ \varphi_3(t),\ t>t_0.\end{cases}$$

证明 为了证明该定理, 我们将引进两个辅助问题 (左问题和右问题)

左问题 ($-1\leqslant t\leqslant t^*$, t^* 作为参数):

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}y^{(-)}}{\mathrm{d}t}=z^{(-)},\quad \mu\dfrac{\mathrm{d}z^{(-)}}{\mathrm{d}t}=F(z^{(-)},y^{(-)},t), \\ y^{(-)}(-1,\mu)=0,\quad y^{(-)}(t^*,\mu)=\varphi_2(t^*). \end{cases}\tag{5.57}$$

右问题 ($t^* \leqslant t \leqslant 1$, t^* 作为参数):

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}y^{(+)}}{\mathrm{d}t} = z^{(+)}, \quad \mu\dfrac{\mathrm{d}z^{(+)}}{\mathrm{d}t} = F(z^{(+)}, y^{(+)}, t), \\ y^{(+)}(t^*, \mu) = \varphi_2(t^*), \quad y^{(+)}(1, \mu) = 0. \end{cases} \tag{5.58}$$

左右问题解的存在性见 [1], 为了使 $y^{(\mp)}$ 复合成 (5.52), (5.53) 的解, 需要它们在 $t = t^*$ 处光滑连接, 即

$$z^{(-)}(t^*, \mu) = z^{(+)}(t^*, \mu). \tag{5.59}$$

根据边界层函数法 [1], 写出左右问题的渐近解

$$\begin{cases} y^{(-)}(t, \mu) = \varphi_1(t) + \Pi_0 y^{(-)}(\tau_{-1}) + Q_0 y^{(-)}(\tau) + O(\mu), \\ z^{(-)}(t, \mu) = \Pi_0 z^{(-)}(\tau_{-1}) + Q_0 z^{(-)}(\tau) + O(\mu), \end{cases} \tag{5.60}$$

$$\begin{cases} y^{(+)}(t, \mu) = \varphi_3(t) + Q_0 y^{(+)}(\tau) + R_0 y^{(+)}(\tau_1) + O(\mu), \\ z^{(+)}(t, \mu) = Q_0 z^{(+)}(\tau) + R_0 z^{(+)}(\tau_1) + O(\mu), \end{cases} \tag{5.61}$$

其中 $\tau_{-1} = (t+1)/\mu$, $\tau = (t - t^*)/\mu$, $\tau_1 = (t-1)/\mu$, $|O(\mu)| \leqslant C\mu$, C 不依赖于 t^*.

往下只写出 $Q_0 z^{(\mp)}(\tau)$, $Q_0 y^{(\mp)}(\tau)$ 满足的方程和定解条件

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} Q_0 y^{(\mp)} = Q_0 z^{(\mp)}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} Q_0 z^{(\mp)} = F(Q_0 z^{(\mp)}, \varphi_{1,3}(t^*) + Q_0 y^{(\mp)}, t^*), \\ Q_0 y^{(\mp)}(0) = \varphi_2(t^*) - \varphi_{1,3}(t^*), \\ Q_0 y^{(\mp)}(\pm\infty) = 0, \quad Q_0 z^{(\mp)}(\pm\infty) = 0. \end{cases} \tag{5.62}$$

对 (5.62) 做变量替换

$$\tilde{z}^{(\mp)} = Q_0 z^{(-)}(\tau), \quad \tilde{y}^{(\mp)} = \varphi_{1,3}(t^*) + Q_0 y^{(\mp)}(\tau)$$

之后可写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}^{(\mp)}}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{z}^{(\mp)}, \quad \dfrac{\mathrm{d}\tilde{z}^{(\mp)}}{\mathrm{d}\tau} = F(\tilde{z}^{(\mp)}, \tilde{y}^{(\mp)}, t^*), \\ \tilde{y}^{(\mp)}(0) = \varphi_2(t^*), \\ \tilde{y}^{(\mp)}(\mp\infty, t^*) = \varphi_{1,3}(t^*), \quad \tilde{z}^{(\mp)}(\mp\infty, t^*) = 0. \end{cases} \tag{5.63}$$

记 $G(t^*, \mu) = z^{(+)}(t^*, \mu) - z^{(-)}(t^*, \mu)$. 把 (5.60), (5.61) 中的 $z^{(\mp)}(t, \mu)$, 代入

$$G(t^*, \mu) = \tilde{z}^{(+)}(0, t^*) - \tilde{z}^{(-)}(0, t^*) + O(\mu) = H(t^*) + O(\mu).$$

考察

$$\begin{aligned}G(t_0\pm K\mu,\mu)&=H(t_0\pm K\mu)+O(\mu)\\&=H(t_0)\pm\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t^*}(t_0\pm\theta_{(\pm)}K\mu)K\mu+O(\mu)\\&=\pm\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t^*}(t_0\pm\theta_{(\pm)}K\mu)K\mu+O(\mu),\end{aligned}$$

这里 $0<\theta_{(\pm)}<1$.

由条件 [$\mathrm{H}_{5.7}$], 对充分小的 μ 导数值 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t^*}(t_0\pm\theta_{(\pm)}K\mu)$ 与 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0}$ 同号. 所以当 μ 固定时, 只要 K 足够大, $G(t_0+K\mu,\mu)$ 和 $G(t_0-K\mu,\mu)$ 异号. 由介值定理存在 $t^*(\mu)\in[t_0-K\mu,t_0+K\mu]$, 使得 $G(t^*(\mu),\mu)=0$. 因此

$$t^*(\mu)=t_0+O(\mu). \tag{5.64}$$

这样再回到 (5.60), (5.61) 的表达式, 就能得到极限关系式. □

需要指出的是, 如果 t^* 采用 (5.64), 则渐近表达式 (5.60), (5.61) 所达到的量阶是 $O(1)$, 而不是 $O(\mu)$, 所以必须取 $t^*=t_0+\mu t_1+O(\mu^2)$.

5.2.2 渐近解的细化

令

$$t^*=t_0+\mu t_1^*, \tag{5.65}$$

其中 t_1^* 是未知的参数. 为了求出 t_1^*, 需要渐近表达式展开到 $O(\mu^2)$. 下面只写在 $t^*(\mu)$ 邻域附近的渐近解, 边界函数 Π 和 R 因指数小而被忽略.

$$\begin{cases}z^{(\mp)}(t,\mu)=Q_0z^{(\mp)}(\tau)+\mu[\bar z_1^{(\mp)}(t)+Q_1z^{(\mp)}(\tau)]+O(\mu^2),\\y^{(\mp)}(t,\mu)=\bar y_0^{(\mp)}(t)+Q_0y^{(\mp)}(\tau)+\mu[\bar y_1^{(\mp)}(t)+Q_1y^{(\mp)}(\tau)]+O(\mu^2).\end{cases} \tag{5.66}$$

表达式 (5.66) 是左右边界函数的合写, 其中 $\bar y_0^{(-)}=\varphi_1(t)$, $\bar y_0^{(+)}=\varphi_3(t)$. 内部层函数 $Q_0z^{(\mp)}$, $Q_0y^{(\mp)}$ 满足的方程和定解条件类似于 (5.62), (5.63), 只要把 t^* 换成 t_0 即可

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Q_0y^{(\mp)}=Q_0z^{(\mp)},\\\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Q_0z^{(\mp)}=F(Q_0z^{(\mp)},\bar y_0^{(\mp)}(t_0)+Q_0y^{(\mp)},t_0),\\Q_0y^{(\mp)}(0)=\bar y_0^{(\mp)}(t_0)-\varphi_2(t_0),\\Q_0y^{(\mp)}(\pm\infty)=Q_0z^{(\mp)}(\pm\infty)=0.\end{cases}$$

做变量替换 $\tilde y^{(\mp)}=\bar y_0^{(\mp)}(t_0)+Q_0y^{(\mp)}(\tau)$, $\tilde z^{(\mp)}=Q_0^{(\mp)}z(\tau)$ 可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde y^{(\mp)}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde z^{(\mp)},\quad\dfrac{\mathrm{d}\tilde z^{(\mp)}}{\mathrm{d}\tau}=F(\tilde z^{(\mp)},\tilde y^{(\mp)},t_0),\\\tilde y^{(\mp)}(0)=\varphi_2(t_0),\\\tilde y^{(\mp)}(\pm\infty)=\varphi_{1,3}(t_0),\quad\tilde z^{(\mp)}(\pm\infty)=0.\end{cases} \tag{5.67}$$

由定理 5.3 可知 $\tilde{y}^{(-)}$ 和 $\tilde{y}^{(+)}$ 在 $\tau=0$ 处光滑连接. 往下把 $\tilde{y}^{(\pm)}$, $\tilde{z}^{(\pm)}$ 简记成 $\tilde{z}$, $\tilde{y}$, 而记 $F(\tilde{z},\tilde{y},t_0)=\tilde{F}$. 这时 (5.67) 可以写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{z}, \quad \dfrac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau}=F(\tilde{z},\tilde{y},t_0), \\ \tilde{y}(0)=\varphi_2(t_0), \ \tilde{y}(\pm\infty)=\varphi_{1,3}(t_0), \ \tilde{z}(\pm\infty)=0. \end{cases} \tag{5.68}$$

再看 (5.66) 中 $Q_1z^{(\mp)}$, $Q_1y^{(\mp)}$ 满足的方程和定解条件

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Q_1z^{(\mp)}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{F}_zQ_1z^{(\mp)}+\tilde{F}_yQ_1y^{(\mp)}+h_1^{(\mp)}, \\ \dfrac{\mathrm{d}Q_1y^{(\mp)}}{\mathrm{d}\tau}=Q_1z^{(\mp)}, \\ Q_1y^{(\mp)}(0)=[\varphi_2'(t_0)-(\bar{y}_0^{(\mp)})'(t_0)]t_1^*-\bar{y}_1^{(\mp)}(t_0), \\ Q_1y^{(\mp)}(\mp\infty)=0, \ Q_1z^{(\mp)}(\mp\infty)=0, \end{cases} \tag{5.69}$$

其中

$$\begin{aligned} &(\bar{y}_0^{(-)})'(t_0)=\varphi_1'(t_0), \quad (\bar{y}_0^{(+)})'(t_0)=\varphi_3'(t_0), \\ &h^{(\mp)}=\tilde{F}_z(\bar{y}_0^{(\mp)})'(t_0)+\tilde{F}_y[(\bar{y}_0^{(\mp)})'(t_0)(t_1^*+\tau)+\bar{y}_1^{(\mp)}(t_0)]+\tilde{F}_t(t_1^*+\tau). \end{aligned}$$

把表达式 (5.66) 代入 $G(t^*,u)=0$ 使得 (5.59) 成立, 即

$$\begin{aligned} G(t^*,\mu)=&Q_0z^{(+)}(0)-Q_0z^{(-)}(0)+\mu(\varphi_3'(t_0)-\varphi_1'(t_0)) \\ &+\mu(Q_1z^{(+)}(0)-Q_1z^{(-)}(0))+O(\mu^2)=0, \end{aligned}$$

化简后

$$\varphi_3'(t_0)-\varphi_1'(t_0)+Q_1z^{(+)}(0)-Q_1z^{(-)}(0)+O(\mu)=0. \tag{5.70}$$

因为 $Q_1z^{(+)}(0)$ 含有 t_1^*, 所以 (5.70) 就是确定 t_1^* 的方程.

为了化简 (5.70) 要用到格林公式

$$\int_0^1 (vLu-uLv)\mathrm{d}t=\left[p(t)\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\right]\Bigg|_0^1, \tag{5.71}$$

其中

$$Lu=(p(t)u')'-q(t)u=g(t)$$

是某个二阶非齐次自共轭方程.

把 (5.67) 写成二阶方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}Q_1y^{(\mp)}-\tilde{F}_z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Q_1y^{(\mp)}-\tilde{F}_yQ_1y^{(\mp)}=h_1^{(\mp)},$$

这是形如 $u''-\tilde{F}_z u'-\tilde{F}_y u=h_1^{(\mp)}$ 的非自共轭方程. 在该方程的两边乘以 $p(\tau)=\mathrm{e}^{-\int_0^\tau \tilde{F}_z(\tau)\mathrm{d}\tau}$ 就能化为自共轭方程

$$pu''-p\tilde{F}_z u'-p\tilde{F}_y u=ph_1^{(\mp)}.$$

令 $Lu=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(p\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau})-p\tilde{F}_y u$, 有 $LQ_1y^{(\mp)}=ph_1^{(\mp)}$, 其中

$$\begin{aligned}LQ_1y^{(\mp)}&=p\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}Q_1y^{(\mp)}-p\tilde{F}_z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Q_1y^{(\mp)}-p\tilde{F}_yQ_1y^{(\mp)}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}Q_1y^{(\mp)})-p\tilde{F}_yQ_1y^{(\mp)}.\end{aligned}$$

我们有这样的结论: Q_0y 的导数 Q_0z 是 $Lu=ph_1^{(\mp)}$ 所对应齐次方程的特解. 这是因为在 (5.68) 中对 τ 微分有

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau^2}=\tilde{F}_z\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau}+\tilde{F}_y\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}(Q_0z)=\tilde{F}_z(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Q_0z)+\tilde{F}_yQ_0z,$$

所以

$$p\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}(Q_0z)-p\tilde{F}_z(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Q_0z)-p\tilde{F}_yQ_0z=0,$$

即

$$L(Q_0z)=0.$$

由此可知

$$\int_{-\infty}^0(Q_0zLQ_1y-Q_1yL(Q_0z))\mathrm{d}\tau=\left[p\left(Q_0z\frac{\mathrm{d}Q_1y}{\mathrm{d}\tau}-Q_1y\frac{\mathrm{d}Q_0z}{\mathrm{d}\tau}\right)\right]\Bigg|_{-\infty}^0,$$

即

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0\tilde{z}p(\tau)h^{(-)}(\tau)\mathrm{d}\tau=&\,p(0)[Q_0z(0)Q_1z^{(-)}(0)-Q_1y^{(-)}(0)\tilde{z}'(0)]-\\&-p(-\infty)[Q_0z(-\infty)Q_1z^{(-)}(-\infty)-Q_1y(-\infty)\tilde{z}'(-\infty)].\end{aligned}$$

[$\mathrm{H}_{5.8}$] 假设 $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty}p(\tau)$ 有界.

由此可得

$$\int_{-\infty}^0\tilde{z}(\tau)p(\tau)h^{(-)}(\tau)\mathrm{d}\tau=\tilde{z}(0)Q_1z^{(-)}(0)-Q_1y^{(-)}(0)\tilde{z}'(0).$$

把 $Q_1z^{(-)}(0)$ 表示出来

$$Q_1z^{(-)}(0)=\tilde{z}^{-1}(0)[\int_{-\infty}^0\tilde{z}(\tau)p(\tau)h^{(-)}(\tau)\mathrm{d}\tau+Q_1y^{(-)}(0)\tilde{z}'(0)].\tag{5.72}$$

同理可得

$$Q_1 z^{(+)}(0) = \tilde{z}^{-1}(0)[\int_{+\infty}^{0} \tilde{z}(\tau)p(\tau)h^{(+)}(\tau)\mathrm{d}\tau + Q_1 y^{(+)}(0)\tilde{z}'(0)]. \tag{5.73}$$

把 (5.72), (5.73) 代入 (5.70)

$$\varphi_3'(t_0) - \varphi_1'(t_0) + \tilde{z}^{-1}(0)[\int_{+\infty}^{0} \tilde{z}ph^{(+)}\mathrm{d}\tau + Q_1 y^{(+)}(0)\tilde{z}'(0)]$$

$$-\tilde{z}^{-1}(0)[\int_{-\infty}^{0} \tilde{z}ph^{(-)}\mathrm{d}\tau + Q_1 y^{(-)}(0)\tilde{z}'(0)] + O(\mu) = 0,$$

即

$$\tilde{z}(0)[\varphi_3'(t_0) - \varphi_1'(t_0)] + \int_{+\infty}^{0} \tilde{z}ph_1^{(+)}\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{0} \tilde{z}ph_1^{(-)}\mathrm{d}\tau +$$

$$+[Q_1 y^{(+)}(0) - Q_1 y^{(-)}(0)]\tilde{z}'(0) + O(\mu) = 0.$$

考虑到

$$\begin{aligned} Q_1 y^{(+)}(0) - Q_1 y^{(-)}(0) &= \{[\varphi_2'(t_0) - (\bar{y}_0^{(+)})']t_1^* - y_1^{(+)}(t_0)\} - \\ &\quad -\{[\varphi_2'(t_0) - (\bar{y}_0^{(-)})']t_1^* - y_1^{(-)}(t_0)\} \\ &= -[\varphi_3'(t_0) - \varphi_1'(t_0)]t_1^* - [y_1^{(+)}(t_0) - y_1^{(-)}(t_0)], \end{aligned}$$

所以

$$\tilde{z}(0)[\varphi_3'(t_0) - \varphi_1'(t_0)] - \tilde{z}'(0)[\varphi_3'(t_0) - \varphi_1'(t_0)]t_1^* - \tilde{z}'(0)[y_1^{(+)}(t_0) - y_1^{(-)}(t_0)] +$$

$$+\int_{+\infty}^{0} \tilde{z}ph_1^{(+)}\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{0} \tilde{z}ph_1^{(-)}\mathrm{d}\tau + O(\mu) = 0. \tag{5.74}$$

而

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{0} \{\tilde{z}p\tilde{F}_z\varphi_1'(t_0) + \tilde{z}p\tilde{F}_y[\varphi_1'(t_0)(t_1^* + \tau) + \bar{y}_1^{(-)}(t_0)] + \tilde{z}p\tilde{F}_t(t_1^* + \tau)\}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{0} \{\tilde{z}p\tilde{F}_z\varphi_1'(t_0) + \tilde{z}p\tilde{F}_y\varphi_1'(t_0)\tau\}\mathrm{d}\tau + t_1^*\int_{-\infty}^{0} \{\tilde{z}p\tilde{F}_y\varphi_1'(t_0) + \tilde{z}p\tilde{F}_t\}\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{0} \tilde{z}p\tilde{F}_z\bar{y}_1^{(-)}(t_0)\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{0} \tilde{z}p\tilde{F}_t\tau\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$

下面对 (5.74) 中的积分进行简化, 利用等式

$$p\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}(\tilde{y}') - p(\tilde{F}_z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{y}' + \tilde{F}_y\tilde{y}') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{y}') - p\tilde{F}_y\tilde{y}' = 0,$$

有

$$\int_{-\infty}^{0} \tilde{y}' p \tilde{F}_y \varphi_1'(t_0)\,\mathrm{d}\tau = \varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} \tilde{y}' p \tilde{F}_y\,\mathrm{d}\tau = \varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{y}'\right)\mathrm{d}\tau = \varphi_1'(t_0)\tilde{y}''(0).$$

同理

$$\int_{0}^{+\infty} \tilde{y}' p \tilde{F}_y \varphi_3'(t_0)\mathrm{d}\tau = -\varphi_3'(t_0)\tilde{y}''(0).$$

往下有

$$\int_{-\infty}^{0} \tilde{y}' p \tilde{F}_y \varphi_1'(t_0)\tau\,\mathrm{d}\tau = \varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} \tilde{y}' p \tilde{F}_y \tau\,\mathrm{d}\tau = \varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} \tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{y}')\,\mathrm{d}\tau = \varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} \tau\,\mathrm{d}(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{y}') = -\varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} p\tilde{y}''\,\mathrm{d}\tau.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} [\tilde{y}' p \tilde{F}_z \varphi_1'(t_0) + \tilde{y}' p \tilde{F}_y \varphi_1'(t_0)\tau]\,\mathrm{d}\tau &= \varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} \tilde{y}' p \tilde{F}_z\,\mathrm{d}\tau + \varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} \tilde{y}' p \tilde{F}_y \tau\,\mathrm{d}\tau \\ &= \varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} \tilde{y}' p \tilde{F}_z \mathrm{d}\tau - \varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} p\tilde{y}''\,\mathrm{d}\tau \\ &= \varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} (\tilde{y}' p \tilde{F}_z - p\tilde{y}'')\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\varphi_1'(t_0)\tilde{y}'(0).\end{aligned}$$

即

$$\varphi_1'(t_0)\int_{-\infty}^{0} p\tilde{z}(\tilde{F}_z + \tilde{F}_y\tau)\mathrm{d}\tau = -\varphi_1'(t_0)\tilde{y}'(0).$$

类似有

$$\varphi_3'(t_0)\int_{0}^{+\infty} p\tilde{z}(\tilde{F}_z + \tilde{F}_y\tau)\mathrm{d}\tau = \varphi_3'(t_0)\tilde{y}'(0).$$

由此可得

$$-\int_{-\infty}^{0} \tilde{z}p\{\tilde{F}_z\varphi_1'(t_0) + \tilde{F}_y[\varphi_1'(t_0)(t_1^* + \tau) + \bar{y}_1^{(-)}(t_0)]\}\mathrm{d}\tau - $$
$$-\int_{0}^{+\infty} \tilde{z}p\{\tilde{F}_z\varphi_3'(t_0) + \tilde{F}_y[\varphi_3'(t_0)(t_1^* + \tau) + \bar{y}_1^{(+)}(t_0)]\}\mathrm{d}\tau =$$

$$[\varphi_3'(t_0)-\varphi_1'(t_0)]\tilde{z}'(0)t_1^*+[\bar{y}_1^{(-)}(t_0)-\bar{y}_1^{(+)}(t_0)]\tilde{z}'(0)+[\varphi_1'(t_0)-\varphi_3'(t_0)]\tilde{z}(0).$$

把化简部分与 (5.74) 抵消掉就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{z}p\tilde{F}_t\tau\mathrm{d}\tau+t_1^*\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{z}p\tilde{F}_t\mathrm{d}\tau=O(\mu)\,, \tag{5.75}$$

即

$$t_1^*=(-\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{z}p\tilde{F}_t\tau\mathrm{d}\tau)(\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{z}p\tilde{F}_t\mathrm{d}\tau)^{-1}+O(\mu)\,.$$

在 (5.67) 中, 如果写 $t_1^*=t_1+O(\mu)$, 则

$$t_1=(-\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{z}p\tilde{F}_t\tau\mathrm{d}\tau)(\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{z}p\tilde{F}_t\mathrm{d}\tau)^{-1}\,.$$

利用以前记法

$$H(t^*)=\tilde{z}^{(+)}(t^*)-\tilde{z}^{(-)}(t^*),\quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t^*}=\frac{\partial}{\partial t^*}\tilde{z}^{(+)}(t^*)-\frac{\partial}{\partial t^*}\tilde{z}^{(-)}(t^*)$$

将证明 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t^*}|_{t^*=t_0}\neq 0$, 从而推出在 t_1^* 的表达式中分母不为零.

先回忆在 (5.63) 中代换

$$\tilde{y}^{(\mp)}=\varphi_{1,3}(t^*)+Q_0y^{(\mp)},\quad \tilde{z}^{(\mp)}=Q_0z^{(\mp)},$$

令 $\frac{\partial}{\partial t^*}Q_0y^{(\mp)}=q^{(\mp)}$, $\frac{\partial}{\partial t^*}Q_0z^{(\mp)}=\gamma^{(\mp)}$, 在 (5.63) 中对 t^* 进行微分

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\dfrac{\mathrm{d}Q_0z^{(\mp)}}{\mathrm{d}t^*})=F_z(\cdot)\dfrac{\mathrm{d}Q_0z^{(\mp)}}{\mathrm{d}t^*}+F_y(\cdot)[\dfrac{\mathrm{d}Q_0y^{(\mp)}}{\mathrm{d}t^*}+\varphi_{1,3}'(t^*)]+F_t(\cdot),\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\dfrac{\mathrm{d}Q_0y^{(\mp)}}{\mathrm{d}t^*})=\dfrac{\mathrm{d}Q_0z^{(\mp)}}{\mathrm{d}t^*},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\gamma^{(\mp)}=F_z(\cdot)\gamma^{(\mp)}+F_y(\cdot)(q^{(\mp)}+\varphi_{1,3}'(t^*))+F_t(\cdot),\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}q^{(\mp)}=\gamma^{(\mp)},\\ q^{(\mp)}(0)=\varphi_2'(t^*)-(\bar{y}_0^{(\mp)})'(t^*),\\ q^{(\mp)}(\pm\infty)=\gamma^{(\mp)}(\pm\infty)=0.\end{cases} \tag{5.76}$$

利用格林公式有

$$\gamma^{(+)}(0)-\gamma^{(-)}(0)=\tilde{z}^{-1}(0)\{\int_0^{-\infty}\tilde{z}p[\tilde{F}_y\varphi_1'(t_0)+\tilde{F}_t]\mathrm{d}\tau-$$

$$-\int_0^{+\infty}\tilde{z}p[\tilde{F}_y\varphi_3'(t_0)+\tilde{F}_t]\mathrm{d}\tau+\tilde{z}'(0)[q^{(+)}(0)-q^{(-)}(0)]\}\,,$$

而

$$\int_0^{-\infty} \tilde{z}p\tilde{F}_y\varphi_1'(t_0)\mathrm{d}\tau - \int_0^{+\infty} \tilde{z}p\tilde{F}_y\varphi_3'(t_0)\mathrm{d}\tau = \varphi_3'(t_0)\tilde{y}''(0) - \varphi_1'(t_0)\tilde{y}''(0),$$

这时边界条件为

$$q^{(+)}(0) - q^{(-)}(0) = \varphi_1'(t_0) - \varphi_3'(t_0).$$

考虑到这些, 化简后可得

$$\gamma^{(+)}(0) - \gamma^{(-)}(0) = -\tilde{z}^{-1}(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{z}p\tilde{F}_t\mathrm{d}\tau.$$

因为当 $\tau = 0$ 时, 轨线与 y 轴不交, 所以 $\tilde{z}(0) \neq 0$. 这就说明

$$r^{(+)}(0) - r^{(-)}(0) \neq 0$$

的充要条件为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t^*}|_{t^*=t_0} = \frac{\partial}{\partial t^*}\tilde{z}^{(+)}(t^*) - \frac{\partial}{\partial t^*}\tilde{z}^{(-)}(t^*)|_{t^*=t_0} \neq 0.$$

由此推出 $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{z}p\tilde{F}_t\mathrm{d}\tau \neq 0$, 这就证明了 t_1 的分母不为零.

定理 5.4 问题 (5.52), (5.53) 具有阶梯结构的解是存在的, 它具有下面的渐近表达式

$$y(t,\mu) = \begin{cases} \varphi_1(t) + \Pi_0 y(\tau_{-1}) + Q_0 y^{(-)}(\tau) + O(\mu), & t < t_0 + \mu t_1, \\ \varphi_2(t) + O(\mu), \quad t = t_0 + \mu t_1, \\ \varphi_3(t) + R_0 y(\tau_1) + Q_0 y^{(+)}(\tau) + O(\mu), & t > t_0 + \mu t_1, \end{cases}$$

其中 $\tau = (t - t_0 - \mu t_1)/\mu$.

注释 5.9 利用 $y^{(-)}(t,\mu)$ 和 $y^{(+)}(t,\mu)$ 的高阶渐近表达式可以得到 t^* 的更高阶近似

$$t^* = t_0 + \mu t_1 + \mu^2 t_2 + \cdots,$$

其中确定 t_k 的公式具有与 t_1 相同的分母.

5.2.3 若干特殊情况和例子

例 5.1 讨论下面边值问题

$$\begin{cases} \mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = A(y,t)(\mu\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2 + B(y,t), \\ y(-1,\mu) = y(1,\mu) = 0, \end{cases}$$

其中假设 $B(\bar{y},t) = 0$ 有三个根: $\varphi_1(t) < \varphi_2(t) < \varphi_3(t)$, 并且 $B_y(\varphi_{1,3}) > 0$, $B_y(\varphi_2) < 0$.

这里

$$F(z,y,t)=A(y,t)z^2+B(y,t).$$

把它化成等价方程组

$$\begin{cases}\mu y'=z,\\ \mu z'=A(y,t)z^2+B(y,t).\end{cases}$$

显然, $F(0,y,t)=B(y,t)$ 有三个根 $\varphi_1(t)<\varphi_2(t)<\varphi_3(t)$ 且满足

$$F_y(0,\varphi_{1,3},t)=B_y(\varphi_{1,3})>0,\ F_y(0,\varphi_2,t)=B_y(\varphi_2)<0.$$

这时特征方程为

$$\lambda^2=F_y(0,\varphi,t)=B_y(\varphi,t).$$

当 $\varphi=\varphi_{1,3}$ 时, $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{B_y(\varphi_{1,3},t)}$, 所以 $(\varphi_{1,3},0)$ 是鞍点. 而 $(\varphi_2,0)$ 是中心. 这说明在相平面上存在从 M_3 出发而进入 M_1 的轨线

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{z}[A(y,\bar{t})z^2+B(y,\bar{t})]$$

即

$$\frac{1}{2}(\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}y})=A(y,\bar{t})z^2+B(y,\bar{t}).$$

令 $u=z^2$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=2A(y,\bar{t})u+2B(y,\bar{t})$$

$$u=\mathrm{e}^{2\int_{\varphi_2}^{y}A\,\mathrm{d}\xi}\left[2\int_{\varphi_2}^{y}B\mathrm{e}^{-\int_{\varphi_2}^{\xi}2A\,\mathrm{d}\eta}\,\mathrm{d}\xi+C\right].$$

不妨取 $C=0$, 可得

$$\tilde{z}^{(-)}=\mp\mathrm{e}^{\int_{\varphi_2}^{y}A\,\mathrm{d}\xi}\left[2\int_{\varphi_1}^{y}B\mathrm{e}^{-\int_{\varphi_2}^{\xi}2A\,\mathrm{d}\eta}\,\mathrm{d}\xi+C\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{z}^{(+)}=\mp\mathrm{e}^{\int_{\varphi_2}^{y}A\,\mathrm{d}\xi}\left[2\int_{\varphi_3}^{y}B\mathrm{e}^{-\int_{\varphi_2}^{\xi}2A\,\mathrm{d}\eta}\,\mathrm{d}\xi+C\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由 $[\mathrm{H}_{5.7}]$ 得到求 t_0 的方程

$$\int_{\varphi_1(t_0)}^{\varphi_3(t_0)}B(\xi,t_0)\mathrm{e}^{\int_{\xi}^{\varphi_2(t_0)}2A(\eta,t_0)\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\xi=0.$$

条件 $[\mathrm{H}_{5.8}]$ 也满足, 这是因为 $\tilde{F}_z=2A(\tilde{y},t_0)\tilde{z}$, 并且

$$-\int_0^{\tau}\tilde{F}_z\mathrm{d}\tau=-2\int_{\varphi_2}^{\tilde{y}}A(y,t_0)\mathrm{d}y<0,$$

所以

$$p(\tau)=\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau}\tilde{F}_z\mathrm{d}\tau}=\mathrm{e}^{-2\int_{\varphi_2}^{\tilde{y}}A(y,t_0)\mathrm{d}y}$$

有界.

例 5.2 讨论下面问题

$$\begin{cases} \mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=A(y,t)(\mu\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+1), \\ y(-1,\mu)=y(1,\mu)=0. \end{cases}$$

假设 $A(\bar{y},t)=0$ 有三个根: $\varphi_1(t)<\varphi_2(t)<\varphi_3(t)$, 并且 $A_y(\varphi_{1,3},t)>0$, $A_y(\varphi_2,t)<0$.

先化成等价方程组

$$\begin{cases} \mu y'=z, \\ \mu z'=A(y,t)(z+1). \end{cases}$$

特征方程为 $\lambda^2=A_y(\varphi,\bar{t})$. 所以 $(\varphi_{1,3},0)$ 是鞍点, 而 $(\varphi_2,0)$ 是中心.

写出辅助方程

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tilde{y}}=\frac{A(\tilde{y},t_0)(\tilde{z}+1)}{\tilde{z}},$$

由积分得

$$\int_{\tilde{z}(-\infty)}^{\tilde{z}(\tau)}\frac{\tilde{z}}{\tilde{z}+1}\mathrm{d}z=\int_{\tilde{y}(-\infty)}^{\tilde{y}(\tau)}A(\tilde{y},t_0)\mathrm{d}\tilde{y},$$

即

$$[\tilde{z}^{(-)}(\tau)-\ln(1+\tilde{z}^{(-)}(\tau))]=\int_{\varphi_1(t_0)}^{\tilde{y}(\tau)}A(\tilde{y},t_0)\mathrm{d}\tilde{y}.$$

同理, 对 $\displaystyle\int_{\tilde{z}(+\infty)}^{\tilde{z}(\tau)}\frac{\tilde{z}}{\tilde{z}+1}\mathrm{d}z=\int_{\tilde{y}(+\infty)}^{\tilde{y}(\tau)}A(\tilde{y},t_0)\mathrm{d}\tilde{y}$ 积分可得

$$[\tilde{z}^{(+)}(\tau)-\ln(1+\tilde{z}^{(+)}(\tau))]=\int_{\varphi_3(t_0)}^{\tilde{y}(\tau)}A(\tilde{y},t_0)\mathrm{d}\tilde{y}.$$

这样就得到了求 t_0 的方程

$$\int_{\varphi_1(t_0)}^{\varphi_3(t_0)}A(y,t_0)\mathrm{d}y=0.$$

下面验证条件 $[\mathrm{H}_{5.8}]$

$$\int_0^{\tau}\tilde{F}_z\mathrm{d}\tau=\int_0^{\tau}A(\tilde{y},t_0)\mathrm{d}\tau=\int_{\varphi_2(t_0)}^{\tilde{y}}A(y,t_0)z^{-1}(y)\,\mathrm{d}y,$$

这里 $z(y)$ 是 y 的函数.

因为

$$z(z+1)^{-1}\mathrm{d}z=A(y,t_0)\mathrm{d}y,$$

所以

$$(z+1)^{-1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=A(y,t_0)z^{-1},$$

进而

$$\int_{\tilde{y}(-\infty)}^{\tilde{y}} A(y,t_0)z^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\tilde{z}(-\infty)}^{\tilde{z}} (z+1)^{-1}\,\mathrm{d}z$$
$$= \ln(z+1)|_{\tilde{z}(-\infty)}^{\tilde{z}}$$
$$= \ln(\tilde{z}+1).$$

最终可得

$$p(\tau) = \mathrm{e}^{-\int_0^\tau \tilde{F}_z\,\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{1+\tau},$$

所以 $p(\tau)$ 在相平面上有界.

5.3 方程组的阶梯状解

我们先讨论一阶方程组和第二类边值条件 [10]

$$\begin{cases} \mu u' = F(u,v,t), \\ \mu v' = G(u,v,t), & (5.77) \\ u'(0,\mu) = 0, \quad u'(1,\mu) = 0. & (5.78) \end{cases}$$

给出下面条件:

[$H_{5.9}$] 假设对固定的 $t=\bar{t}\in[0,1]$, 辅助方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau} = F(\tilde{u},\tilde{v},\bar{t}), & (5.79) \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau} = G(\tilde{u},\tilde{v},\bar{t}), & (5.80) \end{cases}$$

有一个首次积分 $\Phi(\tilde{u},\tilde{v},\bar{t})=C$.

[$H_{5.10}$] 假设对固定的 $t=\bar{t}\in[0,1]$, 辅助方程组 (5.79), (5.80) 有两个鞍点 $M_i(\varphi_i(\bar{t}),\psi_i(\bar{t}))(i=1,2)$, 其中 $(\varphi_i(\bar{t}),\psi_i(\bar{t}))$ 是退化方程组 $F(\tilde{u},\tilde{v},\bar{t})=0$, $G(\tilde{u},\tilde{v},\bar{t})=0$ 的两个孤立根.

经过 M_1, M_2 的轨线满足方程 ($\bar{t}$ 固定)

$$S_{M_1}: \quad \Phi(\tilde{u},\tilde{v},\bar{t}) = \Phi(\varphi_1(\bar{t}),\psi_1(\bar{t}),\bar{t}), \tag{5.81a}$$

$$S_{M_2}: \quad \Phi(\tilde{u},\tilde{v},\bar{t}) = \Phi(\varphi_2(\bar{t}),\psi_2(\bar{t}),\bar{t}), \tag{5.81b}$$

[$H_{5.11}$] 假设在某个时刻 $t=t_0\in(0,1)$ 有连接 M_1, M_2 的异宿轨道.

显然, 转移点 t_0 满足下面方程

$$\Phi(\varphi_1(t_0),\psi_1(t_0),t_0) = \Phi(\varphi_2(t_0),\psi_2(t_0),t_0). \tag{5.82}$$

当然这样的 t_0 可能存在多个, 但这里我们考虑只有一个的情况.

为了证明 (5.77), (5.78) 存在阶梯状解, 我们需要引进下面两个辅助问题 (左右问题)

左问题 ($0 \leqslant t \leqslant t^*$, t^* 为参数):

$$\begin{cases} \mu u' = F(u,v,t), \\ \mu v' = G(u,v,t), \\ u'(0,\mu) = 0, \quad u(t^*,\mu) = \dfrac{1}{2}(\varphi_1(t^*) + \varphi_2(t^*)) = u_0(t^*). \end{cases}$$

右问题 ($t^* \leqslant t \leqslant 1$):

$$\begin{cases} \mu u' = F(u,v,t), \\ \mu v' = G(u,v,t), \\ u(t^*,\mu) = u_0(t^*), \quad u'(1,\mu) = 0. \end{cases}$$

这里 $t^* \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, 而 δ 是一个很小的正数.

由边界层函数法 [1], 左右问题的解 $\{u^{(\pm)}(t,\mu), v^{(\pm)}(t,\mu)\}$ 是存在的, 且有下面渐近表达式

$$\begin{cases} u^{(-)}(t,\mu) = \varphi_2(t) + Q_0^{(-)}u(\tau) + O(\mu), \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*, \\ v^{(-)}(t,\mu) = \psi_2(t) + Q_0^{(-)}v(\tau) + O(\mu). \end{cases} \tag{5.83}$$

$$\begin{cases} u^{(+)}(t,\mu) = \varphi_1(t) + Q_0^{(+)}u(\tau) + O(\mu), \quad t^* \leqslant t \leqslant 1, \\ v^{(+)}(t,\mu) = \psi_1(t) + Q_0^{(+)}v(\tau) + O(\mu). \end{cases} \tag{5.84}$$

[$H_{5.12}$] 假设方程 (5.81a), (5.81b) 关于 v 在 $u_0(t^*)$ 的邻域能表示成

$$S_{M_1}: \quad \tilde{v}^{(-)} = V(\tilde{u}, \varphi_1(\bar{t}), \psi_1(\bar{t}), \bar{t}),$$

$$S_{M_2}: \quad \tilde{v}^{(+)} = V(\tilde{u}, \varphi_2(\bar{t}), \psi_2(\bar{t}), \bar{t}).$$

记 $\Delta v = \tilde{v}^{(+)} - \tilde{v}^{(-)}$.

显然

$$\Delta v(t_0) = V(u_0(t_0), \varphi_1(t_0), \psi_1(t_0), t_0) - V(u_0(t_0), \varphi_2(t_0), \psi_2(t_0), t_0) = 0.$$

[$H_{5.13}$] 假设 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta V(t_0) \neq 0$.

由 [$H_{5.13}$] 可知, 对足够小的 δ($\mu \to 0$ 但固定) 有 $\Delta v|_{\bar{t}=t_0-\delta} < 0$, $\Delta v|_{\bar{t}=t_0+\delta} > 0$. 这两个不等式的几何意义是经过 $t_0 - \delta$ 或 $t_0 + \delta$ 时, 从 M_2 出发的轨线比进入 M_1 的轨线低 (高). 所以

$$v^{(+)}(t,\mu) - v^{(-)}(t,\mu)\Big|_{t=t_0-\delta} = \Delta v|_{t=t_0-\delta} + O(\mu) < 0,$$

$$v^{(+)}(t,\mu)-v^{(-)}(t,\mu)\Big|_{t=t_0+\delta}=\Delta v|_{t=t_0+\delta}+O(\mu)>0.$$

这就意味着存在 $t^*\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$, 使得 $v^{(+)}(t^*,\mu)=v^{(-)}(t^*,\mu)$. 由此说明左右问题解的 u, v 分量都能连续地连接起来, 所以问题 (5.77), (5.78) 存在阶梯状解. 把上面得到的结论归结为下面的定理.

定理 5.5 如果满足条件 $[\mathrm{H}_{5.9}]$—$[\mathrm{H}_{5.13}]$, 则 (5.77), (5.78) 存在阶梯状的内部层解, 即有下面极限性态

$$\lim_{\mu\to 0}u(t,\mu)=\begin{cases}\varphi_2(t), & t<t_0,\\ \varphi_1(t), & t>t_0,\end{cases}$$

$$\lim_{\mu\to 0}v(t,\mu)=\begin{cases}\psi_2(t), & t<t_0,\\ \psi_1(t), & t>t_0.\end{cases}$$

从上面的证明可以看出, 只是在 t_0 的 δ 邻域表达式 (5.83), (5.84) 是 $O(\mu)$ 的. 为了得到在整个区间 $[0,1]$ 上的渐近表达式余项为 $O(\mu)$, 我们必须对 t^* 展开到 $O(\mu^2)$, 即 $t^*=t_0+\mu t_1+O(\mu^2)$. 还需要求出 t_1.

下面我们把渐近表达式 (5.83), (5.84) 展开到一次项. $\{\bar u_0,\bar v_0\}$ 在 t_0 处是间断的, 即

$$\bar u_0=\begin{cases}\varphi_2(t), & t<t_0,\\ \varphi_1(t), & t>t_0,\end{cases}\qquad \bar v_0=\begin{cases}\psi_2(t), & t<t_0,\\ \psi_1(t), & t>t_0.\end{cases}$$

$\{\tilde u=Q_0u+\bar u_0(t_0),\tilde v=Q_0v+\bar v_0(t_0)\}$ 在 $\tau=0$ 处连续, 它们满足下面方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde u}{\mathrm{d}\tau}=F(\tilde u,\tilde v,t_0),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\tilde v}{\mathrm{d}\tau}=G(\tilde u,\tilde v,t_0).\end{cases}$$

一次近似项 $\{Q_1u,Q_1v\}$ 有下面方程组确定

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Q_1u}{\mathrm{d}\tau}=F_u(\tilde u,\tilde v,t_0)Q_1u+F_v(\tilde u,\tilde v,t_0)Q_1v+f_1, & (5.85\mathrm{a})\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}Q_1v}{\mathrm{d}\tau}=G_u(\tilde u,\tilde v,t_0)Q_1u+G_v(\tilde u,\tilde v,t_0)Q_1v+g_1, & (5.85\mathrm{b})\end{cases}$$

其中 f_1, g_1 是已知函数. 例如

$$f_1=F_u(\tilde u,\tilde v,t_0)\bar u_0'(t_0)(\tau+t_1)+F_v(\tilde u,\tilde v,t_0)\bar v_0'(t_0)(\tau+t_1)+F_t(\tilde u,\tilde v,t_0)(\tau+t_1),$$

$\{Q_1u,Q_1v\}$ 满足下面边值

$$\begin{cases}Q_1u(\pm 0)=[-\bar u_0'(t_0\pm 0)+u_0'(t_0)]t_1-\bar u_1(t_0\pm 0),\\ Q_1v(\pm 0)=[-\bar v_0'(t_0\pm 0)+v_0'(t_0)]t_1-\bar v_1(t_0\pm 0),\\ Q_1u(\pm\infty)=0,\quad Q_1v(\pm\infty)=0.\end{cases}\tag{5.86}$$

导数 $\tilde{u}'=\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau}$, $\tilde{v}'=\dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau}$ 是下面方程组的解

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}'}{\mathrm{d}\tau}=F_u(\tilde{u},\tilde{v},t_0)\tilde{u}'+F_v(\tilde{u},\tilde{v},t_0)\tilde{v}',\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}'}{\mathrm{d}\tau}=G_u(\tilde{u},\tilde{v},t_0)\tilde{u}'+G_v(\tilde{u},\tilde{v},t_0)\tilde{v}'.\end{cases}\tag{5.87}$$

暂时未知的 t_1 所满足的方程可用下面方法求得. 先写出 (5.87) 的共轭系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}'_*}{\mathrm{d}\tau}=-F_u(\tilde{u},\tilde{v},t_0)\tilde{u}'_*-G_u(\tilde{u},\tilde{v},t_0)\tilde{v}'_*,\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}'_*}{\mathrm{d}\tau}=-F_v(\tilde{u},\tilde{v},t_0)\tilde{u}'_*-G_v(\tilde{u},\tilde{v},t_0)\tilde{v}'_*.\end{cases}\tag{5.88}$$

在半无穷区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上分别利用格林公式, 然后相加

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}(\tilde{u}'_*f_1+\tilde{v}'_*g_1)\mathrm{d}\tau+\tilde{u}'_*(0)[\bar{u}_1(t_0+0)-\bar{u}_1(t_0-0)]+\tilde{v}'_*(0)[\bar{v}_1(t_0+0)-\bar{v}_1(t_0-0)]\\&=\tilde{u}'_*(0)[\varphi'_1(t_0)-\varphi'_2(t_0)]t_1+\tilde{v}'_*(0)[\psi'_1(t_0)-\psi'_2(t_0)]t_1.\end{aligned}\tag{5.89}$$

方程 (5.89) 就是求 t_1 的方程.

注释 5.10　如果 (5.77), (5.78) 是 Hamilton 系统, 即 $F=-H_v$, $G=H_u$, 则 (5.87) 和 (5.88) 可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}'}{\mathrm{d}\tau}=-H_{uv}\tilde{u}'-H_{vv}\tilde{v}',\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}'}{\mathrm{d}\tau}=H_{uu}\tilde{u}'+H_{uv}\tilde{v}',\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}'_*}{\mathrm{d}\tau}=H_{uv}\tilde{u}'_*-H_{uu}\tilde{v}'_*,\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}'_*}{\mathrm{d}\tau}=H_{vv}\tilde{u}'_*-H_{uv}\tilde{v}'_*.\end{cases}$$

这时 $\tilde{u}'_*=\tilde{v}'$, $\tilde{v}'_*=-\tilde{u}'$, 求 t_1 就容易得多.

对 Hamilton 系统, 从 (5.89) 可得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}[\tilde{v}'(F_u\bar{u}'_0+F_v\bar{v}'_0+F_t)-\tilde{u}'(G_u\bar{u}'_0+G_v\bar{v}'_0+G_t)]\tau\,\mathrm{d}\tau+t_1\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{v}'F_t-\tilde{u}'G_t)\,\mathrm{d}\tau\\&=\tilde{v}'(0)[\bar{u}_1(t_0+0)-\bar{u}_1(t_0-0)]-\tilde{u}'(0)[\bar{v}_1(t_0+0)-\bar{v}_1(t_0-0)].\end{aligned}\tag{5.90}$$

在 (5.90) 中 t_1 的系数是非零的. 关于这一点, 可这样计算

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{v}'F_t-\tilde{u}'G_t)\,\mathrm{d}\tau&=\int_{-\infty}^{\infty}[\tilde{v}'(-H_{vt})-\tilde{u}'H_{ut}]\,\mathrm{d}\tau\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}H_{ut}\mathrm{d}\tilde{u}+H_{vt}\,\mathrm{d}\tilde{v}\\&=-H_t|_{-\infty}^{\infty}\\&=H_t(\varphi_2(t_0),\psi_2(t_0),t_0)-H_t(\varphi_1(t_0),\psi_1(t_0),t_0).\end{aligned}\tag{5.91}$$

为了证明 (5.91) 式非零, 需要和条件 [H$_{5.13}$] 联系起来. 为此, 重新写出 S_{M_i}, $i=1,2$.

$$S_{M_1}:\quad H(u_0(\bar{t}),\tilde{v}^{(+)},\bar{t})-H(\varphi_1(\bar{t}),\psi_1(\bar{t}),\bar{t})=0,$$
$$S_{M_2}:\quad H(u_0(\bar{t}),\tilde{v}^{(-)},\bar{t})-H(\varphi_2(\bar{t}),\psi_2(\bar{t}),\bar{t})=0.$$

每个方程关于 $\bar{t}$ 求导

$$\tilde{H}_u^{(+)}\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\bar{t}}+\tilde{H}_v^{(+)}\frac{\mathrm{d}\tilde{v}^{(+)}}{\mathrm{d}\bar{t}}+\tilde{H}_t^{(+)}-[\bar{H}_u^{(+)}\dot{\varphi}_1(\bar{t})+\bar{H}_v^{(+)}\dot{\psi}_1(\bar{t})+\bar{H}_t^{(+)}]=0,\quad(5.92)$$
$$\tilde{H}_u^{(-)}\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\bar{t}}+\tilde{H}_v^{(-)}\frac{\mathrm{d}\tilde{v}^{(-)}}{\mathrm{d}\bar{t}}+\tilde{H}_t^{(-)}-[\bar{H}_u^{(-)}\dot{\varphi}_2(\bar{t})+\bar{H}_v^{(-)}\dot{\psi}_2(\bar{t})+\bar{H}_t^{(-)}]=0,\quad(5.93)$$

其中 $\bar{H}_u^{(\pm)}=G(\varphi_{1,2}(\bar{t}),\psi_{1,2}(\bar{t}),\bar{t})=0$, $\bar{H}_v^{(\pm)}=-F(\varphi_{1,2}(\bar{t}),\psi_{1,2}(\bar{t}),\bar{t})=0$.

在 (5.92), (5.93) 左端令 $\bar{t}\to t_0$, 再相减. 考虑到

$$\tilde{H}_u^{(+)}\Big|_{\bar{t}=t_0}=\tilde{H}_u^{(-)}\Big|_{\bar{t}=t_0},\ \tilde{H}_v^{(+)}\Big|_{\bar{t}=t_0}=\tilde{H}_v^{(-)}\Big|_{\bar{t}=t_0},\ \tilde{H}_t^{(+)}\Big|_{\bar{t}=t_0}=\tilde{H}_t^{(-)}\Big|_{\bar{t}=t_0},$$

可得

$$-F(u_0(t_0),v_0,t_0)\frac{\mathrm{d}\Delta v}{\mathrm{d}\bar{t}}\Big|_{\bar{t}=t_0}=\bar{H}_t^{(+)}-\bar{H}_t^{(-)},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\Delta v}{\mathrm{d}\bar{t}}\Big|_{\bar{t}=t_0}=\frac{H_t(\varphi_2(t_0),\psi_2(t_0),t_0)-H_t(\varphi_1(t_0),\psi_1(t_0),t_0)}{F(u_0(t_0),v_0,t_0)}.$$

根据条件 [H$_{5.13}$], 可得 (5.91) 非零. 这样从 (5.90) 就能惟一确定 t_1.

下面讨论三阶方程组 [11]

$$\begin{cases}\mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(u,v,w,t),\\ \mu\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g(u,v,w,t),\\ \mu\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=h(u,v,w,t),\quad 0<t<1,\end{cases}\quad(5.94)$$

其中 $\mu>0$ 是正小参数, 边值条件视情况而给.

[H$_{5.14}$] 假设退化系统

$$f(u,v,w,t)=0,\quad g(u,v,w,t)=0,\quad h(u,v,w,t)=0$$

有两组解:

$$u=\varphi_i(t),\quad v=\psi_i(t),\quad w=\chi_i(t),\quad i=1,2.\quad(5.95)$$

针对下面辅助方程组

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau}=f(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},t),\quad\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau}=g(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},t),\quad\frac{\mathrm{d}\tilde{w}}{\mathrm{d}\tau}=h(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},t)\quad(5.96)$$

的每组解 (5.95) 对应于平衡点 $M_i(\varphi_i(t),\ \psi_i(t),\ \chi_i(t))\ (i=1,2)$, 这里 t 固定, $-\infty < \tau < +\infty$.

[H$_{5.15}$] 假设矩阵 $B_i(t)$ 有三个实特征根 $\lambda_{ik}(t),\ k=1,2,3$.

$$B_i(t) = \begin{pmatrix} f_{\bar{u}} & f_{\bar{v}} & f_{\bar{w}} \\ g_{\bar{u}} & g_{\bar{v}} & g_{\bar{w}} \\ h_{\bar{u}} & h_{\bar{v}} & h_{\bar{w}} \end{pmatrix}_{\bar{u}=\varphi_i(t),\ \bar{v}=\psi_i(t),\ \bar{w}=\chi_i(t).} \tag{5.97}$$

我们把特征值可能出现的符号分成下面各种情况:

1) $M_1[-,-,-], M_2[-,-,-]$; 2) $M_1[-,-,-], M_2[-,-,+]$;
3) $M_1[-,-,-], M_2[-,+,+]$; 4) $M_1[-,-,-], M_2[+,+,+]$;
5) $M_1[-,-,+], M_2[-,-,-]$; 6) $M_1[-,-,+], M_2[-,-,+]$;
7) $M_1[-,-,+], M_2[-,+,+]$; 8) $M_1[-,-,+], M_2[+,+,+]$;
9) $M_1[-,+,+], M_2[-,-,-]$; 10) $M_1[-,+,+], M_2[-,-,+]$;
11) $M_1[-,+,+], M_2[-,+,+]$; 12) $M_1[-,+,+], M_2[+,+,+]$;
13) $M_1[+,+,+], M_2[-,-,-]$; 14) $M_1[+,+,+], M_2[-,-,+]$;
15) $M_1[+,+,+], M_2[-,+,+]$; 16) $M_1[+,+,+], M_2[+,+,+]$.

现在分析上面所列出各种情况:

1) $M_1[-,-,-]$, $M_2[-,-,-]$. 没有连接 M_1 和 M_2 的轨线. 只有在 $t=0$ 附近出现的单边界层且趋向 M_1 或 M_2 的解;

2) $M_1[-,-,-]$, $M_2[-,-,+]$. 没有从 M_1 到 M_2 的阶梯状解. 只有在 $t=0$ 处出现单边界层且趋向 M_1 的解. 或者趋向 M_2 的双边界层解.

3) $M_1[-,-,-]$, $M_2[-,+,+]$. 没有从 M_1 到 M_2 的阶梯状解. 只有趋向于 M_1 的单边界层解, 或者趋向于 M_2 的双边界层解.

4) $M_1[-,-,-]$, $M_2[+,+,+]$. 没有从 M_1 到 M_2 的阶梯状解. 只有在 $t=0$ 附近出现单边界层并趋向于 M_1 的解, 或者在 $t=1$ 附近出现单边界层并趋向于 M_2 的解,

5) $M_1[-,-,+]$, $M_2[-,-,-]$. 有连接 M_1 到 M_2 的轨线, 但无法在 $t=1$ 处给边值.

6) $M_1[-,-,+]$, $M_2[-,-,+]$. 存在从 M_1 到 M_2 的异宿轨道. 既有趋向 M_1, 也有趋向于 M_2 的双边界层解.

7) $M_1[-,-,+]$, $M_2[-,+,+]$. 存在 M_1 到 M_2 的异宿轨道, 但无法在 $t=0$, 或者在 $t=1$ 处给边值. 也有趋向于 M_1 或 M_2 的双边阶层解.

8) $M_1[-,-,+]$, $M_2[+,+,+]$. 没有从 M_1 到 M_2 的异宿轨道. 既有趋向于 M_1 的双边界层解, 也有趋向于 M_2 的单边界层解.

所以从 1)—8) 只有一种情况 6) 对辅助系统能给出边值条件以保证具有内部层的解存在.

同样, 从 9)—16) 也只有一种情况 11) 存在具有内部层的解.

5.3.1 内部转移层解的存在性和转移点位置的确定

[$\mathrm{H}_{5.15'}$] 假设矩阵 (5.97) 对 $i=1,2$ 都有两个负特征值和一个正特征值.

对若干情况 [$\mathrm{H}_{5.15'}$] 确实能满足, 例如

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau}=f(\tilde{u},\tilde{v},t), \quad \dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau}=g(\tilde{u},\tilde{v},t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{w}}{\mathrm{d}\tau}=h(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},t), \quad 0<t<1. \end{cases} \tag{5.98}$$

这时特征方程为

$$[(f_{\tilde{u}}-\lambda)(g_{\tilde{v}}-\lambda)-g_{\tilde{u}}f_{\tilde{v}}]\,(h_{\tilde{w}}-\lambda)=0. \tag{5.99}$$

对二次代数方程 $(f_{\tilde{u}}-\lambda)(g_{\tilde{v}}-\lambda)-g_{\tilde{u}}f_{\tilde{v}}=0$ 能做到异号实根. 如果要求 $\lambda=h_{\tilde{w}}<0$, 那么 (5.99) 就有两个负特征值和一个正特征值.

[$\mathrm{H}_{5.16}$] 假设辅助系统 (5.96) 有两个积分流形 $\Phi_i(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},t)=C_i(\,i=1,2\,)$, t 固定.

$$M_1: \quad \Phi_i(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},t)=\Phi_i(\varphi_1(t),\psi_1(t),\chi_1(t),t), \quad i=1,2, \tag{5.100}$$

$$M_2: \quad \Phi_i(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},t)=\Phi_i(\varphi_2(t),\psi_2(t),\chi_2(t),t), \quad i=1,2. \tag{5.101}$$

[$\mathrm{H}_{5.17}$] 假设 (5.100), (5.101) 分别能表示成

$$\tilde{v}=V^{(-)}(\tilde{u},t), \quad \tilde{w}=W^{(-)}(\tilde{u},t), \tag{5.102}$$

$$\tilde{v}=V^{(+)}(\tilde{u},t), \quad \tilde{w}=W^{(+)}(\tilde{u},t). \tag{5.103}$$

从 (5.100), (5.101) 可得异宿轨道存在的必要条件

$$\Phi_i(\varphi_1(t),\psi_1(t),\chi_1(t),t)=\Phi_i(\varphi_2(t),\psi_2(t),\chi_2(t),t), \quad i=1,2. \tag{5.104}$$

这就是求 t_0 的方程. 请注意 (5.104) 有两个方程, 而自变量只有一个, 所以方程 (5.104) 一般无解.

[$\mathrm{H}_{5.18}$] 假设方程 (5.104) 有解 $t=t_0$.

做差

$$\Delta v=V^{(+)}(\tilde{u},t)-V^{(-)}(\tilde{u},t), \tag{5.105}$$

$$\Delta w=W^{(+)}(\tilde{u},t)-W^{(-)}(\tilde{u},t), \tag{5.106}$$

这里 $\tilde{u}$ 是 t 的任意函数, 但 $\varphi_1(t)<\tilde{u}(t)<\varphi_2(t)$.

[$\mathrm{H}_{5.19}$] 假设导数 $\dfrac{\partial\Delta v}{\partial t}\Big|_{t=t_0}$, $\dfrac{\partial\Delta w}{\partial t}\Big|_{t=t_0}$ 不同时为零.

对方程组 (5.94) 给出边值

$$u(0,\mu)=u^0,\quad v(0,\mu)=v^0,\quad w(1,\mu)=w^1. \tag{5.107}$$

所给问题 (5.94), (5.107) 具有内部层的解可看作是下面左右问题解的合成

左问题: 取方程组 (5.94) 并记解为 $u^{(-)}(t,\mu)$, $v^{(-)}(t,\mu)$, $w^{(-)}(t,\mu)$, $t\in[0,t^*]$.
给出边值条件:

$$u^{(-)}(0,\mu)=u^0,\ v^{(-)}(0,\mu)=v^0,\ u^{(-)}(t^*,\mu)=u^* \tag{5.108}$$

(t^*, u^* 是未知参数).

右问题: 取方程组 (5.94) 并记解为 $u^{(+)}(t,\mu)$, $v^{(+)}(t,\mu)$, $w^{(+)}(t,\mu)$, $t\in[t^*,1]$
给定边值条件:

$$u^{(+)}(t^*,\mu)=u^*,\ v^{(+)}(t^*,\mu)=v^*,\ w^{(+)}(1,\mu)=w^1 \tag{5.109}$$

(u^* 是未知参数), t^* 称为转移点.

可见分量 $u^{(-)}$, $u^{(+)}$ 在 $t=t^*$ 是连续的, 往下由 v, w 在该点的连续性来求 t^*, 即要求:

$$v^{(-)}(t^*,\mu)=v^{(+)}(t^*,\mu),\quad w^{(-)}(t^*,\mu)=w^{(+)}(t^*,\mu),$$

这里未知变量是 t^*, u^*, v^* 和 $w^*=w^*(t^*,\mu)$.

我们把 t^*,u^*,v^* 都展开成 μ 的幂级数

$$\begin{aligned}&t^*=t_0+\mu t_1+\cdots,\ u^*=u_0+\mu u_1+\cdots,\\&v^*=v_0+\mu v_1+\cdots,w^*=w_0+\mu w_1+\cdots,\end{aligned}$$

而认为 u^* 是 t^* 的任意函数. 不妨取

$$u^*(t^*)=\frac{1}{2}[\varphi_1(t^*)+\varphi_2(t^*)].$$

根据边界层函数法, 可写出左右问题的渐近解. 记 $z=\{u,v,w\}$.

$$\begin{aligned}z^{(-)}(t,\mu)=&\bar z_0^{(-)}(t)+\mu\bar z_1^{(-)}(t)+\Pi_0 z(\tau_0)+\mu\Pi_1 z(\tau_0)+\\&+Q_0^{(-)}z(\tau)+\mu Q_1^{(-)}z(\tau)+O(\mu^2),\quad 0\leqslant t\leqslant t^*,\\z^{(+)}(t,\mu)=&\bar z_0^{(+)}(t)+\mu\bar z_1^{(+)}(t)+Q_0^{(+)}z(\tau)+\mu Q_1^{(+)}z(\tau)+\\&+R_0 z(\tau_1)+\mu R_1 z(\tau_1)+O(\mu^2),\quad t^*\leqslant t\leqslant 1,\end{aligned} \tag{5.110}$$

其中 $\tau_0=t/\mu$, $\tau=(t-t^*)/\mu$, $\tau_1=(t-1)/\mu$.

先用渐近解的零次近似:

$$z^{(-)}(t,\mu)=\bar z_0^{(-)}(t)+\Pi_0 z(\tau_0)+Q_0^{(-)}z(\tau)+O(\mu),\quad 0\leqslant t\leqslant t^*, \tag{5.111}$$

$$z^{(+)}(t,\mu)=\bar z_0^{(+)}(t)+Q_0^{(+)}z(\tau)+R_0 z(\tau_1)+O(\mu),\quad t^*\leqslant t\leqslant 1, \tag{5.112}$$

其中

$$\bar{z}_0^{(-)}(t) = \{\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t)\}, \quad \bar{z}_0^{(+)}(t) = \{\varphi_2(t), \psi_2(t), \chi_2(t)\}.$$

内部层函数 $Q_0^{(\mp)}z$ 满足的方程和定解条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Q_0^{(\mp)}z}{\mathrm{d}\tau} = F(\bar{u}_0^{(\mp)}(t_0) + Q_0^{(\mp)}u, \bar{v}_0^{(\mp)}(t_0) + Q_0^{(\mp)}v, \bar{w}_0^{(\mp)}(t_0) + Q_0^{(\mp)}w, t_0), & (5.113) \\ Q_0^{(\mp)}z(0) + \bar{z}_0^{(\mp)}(t_0) = z_0, \quad Q_0^{(\mp)}z(\pm\infty) = 0, & (5.114) \end{cases}$$

这里 $F = \{f, g, h\}, z_0 = \{u_0, v_0, w_0\}$.

从边值条件 (5.114) 可推出

$$[Q_0 z(0) + \bar{z}_0(t_0)]_-^+ = 0. \tag{5.115}$$

对 (5.113), (5.114) 进行变量替换 $\tilde{z} = \bar{z}^{(\pm)}(t_0) + Q_0^{(\pm)}z(\tau)$,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau} = f(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau} = g(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{w}}{\mathrm{d}\tau} = h(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, t), \\ \tilde{z}(0) = z_0, \quad \tilde{z}(-\infty) = \bar{z}_0^{(-)}(t_0), \quad \tilde{z}(\infty) = \bar{z}_0^{(+)}(t_0). \end{cases} \tag{5.116}$$

根据前面的讨论, 为了得到连接 M_1M_2 的轨线, t_0 由 (5.104) 或者 $\Delta v = 0$, $\Delta w = 0$ 确定. 这时

$$\begin{aligned} u_0 &= \tilde{u}(t_0), \\ v_0 &= v^{(-)}(u_0, v_0) = v^{(+)}(u_0, v_0), \\ w_0 &= w^{(-)}(u_0, v_0) = w^{(+)}(u_0, v_0). \end{aligned}$$

下面证在 t_0 的邻域存在 $t^*(\mu)$, 使得左右问题的解光滑连接. 在 t^* 处表达式 (5.111), (5.112) 可表示成

$$\begin{aligned} z^{(-)}(t^*, \mu) &= \bar{z}_0^{(-)}(t^*) + Q_0^{(-)}z(0) + O(\mu), \\ z^{(+)}(t^*, \mu) &= \bar{z}_0^{(+)}(t^*) + Q_0^{(+)}z(0) + O(\mu). \end{aligned} \tag{5.117}$$

考虑到在左右问题中 u^* 是相同的, 还要求在左问题中 v^* 必须与右问题相一致, 即 $v^* = v^{(-)}(t^*, \mu)$. 这样在 t^* 处 z 的前两个分量相等. 可从第三个分量 w 来求 t^*.

从 (5.117) 有

$$w^{(+)}(t^*, \mu) - w^{(-)}(t^*, \mu) = [Q_0 w(0) + \bar{w}_0(t^*)]|_-^+ + O(\mu). \tag{5.118}$$

如果 $\left.\dfrac{\partial \Delta w}{\partial t}\right|_{t=t_0} = 0$, 那么根据 $[\mathrm{H}_{5.19}]$, $\left.\dfrac{\partial \Delta v}{\partial t}\right|_{t=t_0} \neq 0$. 这时对右问题可这样给边值

$$u^{(+)}(t^*,\mu) = u^*, \quad w^{(+)}(t^*,\mu) = w^*,$$

并要求 $w^{(-)}(t^*,\mu) = w^*$. 则 t^* 可由 v 分量的相等来确定 t^*. 所以可以认为 $\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta w|_{t=t_0} \neq 0$, 由隐函数定理存在 $t^*(\mu) = t_0 + O(\mu)$, 使得 $\Delta w(t^*,\mu) = 0$. 这样就证明了具有内部转移层的解存在.

把求得的 t^* 代入 (5.111), (5.112) 可得 (5.94), (5.107) 解. 但是这时在 (5.117) 的渐近解中余项为 $O(1)$. 为了得到余项为 $O(\mu)$ 的渐近解, 必须把 t^* 展开成 $t^* = t_0 + \mu t_1 + O(\mu^2)$. 往下将求 t_1.

在左右问题中令 $t^* = t_0 + \mu t_1^*$, 其中 t_1^* 作为未知参数. 我们要用表达式 (5.110), 余项为 $O(\mu^2)$. 需要写出一次项系数 $\bar{z}_1^{(\pm)}$ 所满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}\bar{z}_1^{(\pm)}}{\mathrm{d}x} = \bar{F}_u \bar{u}_1^{(\pm)} + \bar{F}_v \bar{v}_1^{(\pm)} + \bar{F}_w \bar{w}_1^{(\pm)}. \tag{5.119}$$

这时内部层函数 $Q_1^{(\mp)}z$ 由下面方程确定

$$\frac{\mathrm{d}Q_1^{(\mp)}z}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{F}_u Q_1^{(\mp)}u + \tilde{F}_v Q_1^{(\mp)}v + \tilde{F}_w Q_1^{(\mp)}w + F_1, \tag{5.120}$$

其中

$$\begin{aligned}F_1 = \tilde{F}_u[\dot{\bar{u}}_0^{(\mp)}(t_0)(\tau + t_1^*) + \bar{u}_1^{(\mp)}(t_0)] + \tilde{F}_v[\dot{\bar{v}}_0^{(\mp)}(t_0)(\tau + t_1^*) + \bar{v}_1^{(\mp)}(t_0)] \\ + \tilde{F}_w[\dot{\bar{w}}_0^{(\mp)}(t_0)(\tau + t_1^*) + \bar{w}_1^{(\mp)}(t_0)] + \tilde{F}_t(\tau + t_1^*).\end{aligned}$$

相应边值为

$$[Q_1 z(0) + \bar{z}_1(t_0) + \bar{z}_0'(t_0)t_1^*]_-^+ = 0. \tag{5.121}$$

光滑连接条件为

$$[Q_0 w(0) + \bar{w}_0(t_0)]_-^+ + \mu[Q_1 w(0) + \bar{w}_1(t_0) + \bar{w}_0'(t_0)t_1^*]_-^+ + O(\mu^2) = 0. \tag{5.122}$$

考虑到 $[Q_0 w(0) + \bar{w}_0(t_0)]|_-^+ = 0$, 有

$$[Q_1 w(0) + \bar{w}_1(t_0) + \bar{w}_0(t_0)t_1^*]_-^+ + O(\mu) = 0. \tag{5.123}$$

这就是求 t_1^* 的方程. 请注意 $Q_1 w$ 也含有 t_1^*.

我们将单独讨论对 t_1^* 的依赖性. 从 (5.120), (5.121) 可见, $Q_1 z = \dfrac{\partial Q_1 z}{\partial t_1^*} t_1^* + \tilde{Q}_1 z$, 这里 $\tilde{Q}_1 z$ 仅依赖于 t_0. 事实上, 对 (5.120), (5.121) 关于 t_1^* 求导, 并记 $\dfrac{\partial \tilde{Q}_1 z}{\partial t_1^*} = q_{11} z$

$$\frac{\mathrm{d}q_{11}z}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{F}_u q_{11}u + \tilde{F}_v q_{11}v + \tilde{F}_w q_{11}w + \tilde{F}_u \bar{u}_0' + \tilde{F}_v \bar{v}_0' + \tilde{F}_w \bar{w}_0' + \tilde{F}_t, \tag{5.124}$$

$$[q_{11}z(0)+\bar{z}_0'(t_0)]_-^+=0, \tag{5.125}$$

这里省略了“±”.

如果对 (5.113), (5.115) 关于 t_0 求导, 并记 $q_{00}z=\dfrac{\partial Q_0z}{\partial t_0}$. 发现 $q_{00}z$ 满足与 (5.124), (5.125) 同样的方程和定解条件. 由此可得

$$Q_1z=\frac{\partial Q_0z}{\partial t_0}t_1^*+\tilde{Q}_1z,$$

其中 $\tilde{Q}_1z$ 仅依赖于 t_0.

方程 (5.115) 是 (5.106) 的另一种写法, 所以

$$[\frac{\partial Q_0w}{\partial t_0}+\bar{w}_0'(t_0)]_-^+=\frac{\partial\Delta w}{\partial t}|_{t=t_0}\neq 0.$$

可以把方程 (5.123) 写成

$$t_1^*[\frac{\partial Q_0w}{\partial t_0}+\bar{w}_0'(t_0)]_-^++[\tilde{Q}_1w+\bar{w}_1(t_0)]_-^+=O(\mu). \tag{5.126}$$

参数 t_1 由下面方程确定

$$t_1[\frac{\partial Q_0w}{\partial t_0}+\bar{w}_0'(t_0)]_-^++[\tilde{Q}_1w+\bar{w}_1(t_0)]_-^+=0. \tag{5.127}$$

在 (5.127) 中 t_1 前面的系数非零, 所以 t_1 可惟一确定. 从 (5.126) 可见 $t_1^*=t_1+O(\mu)$, 即 $t^*=t_0+\mu t_1+O(\mu^2)$. 我们把上面的推导归结为下面的定理.

定理 5.6 如果满足条件 [$H_{5.14}$]—[$H_{5.19}$], 那么边值问题 (5.94), (5.107) 在 t^* 的领域存在阶梯状解 (5.111), (5.112), $t^*=t_0+\mu t_1$, 这里 t_0 由方程 $Q_0^{(+)}w(0)+\bar{w}_0^{(+)}(t_0)=Q_0^{(-)}w(0)+\bar{w}_0^{(-)}(t_0)$ 确定, 而 t_1 满足线性方程.

例 5.3 考虑边值问题

$$\begin{cases}\mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v,\\ \mu\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(u^2-1)(u-a(t)),\\ \mu\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2}(u-w),\quad 0<t<1,\\ u(0,\mu)=u^0,\quad w(0,\mu)=w^0,\quad u(1,\mu)=u^1.\end{cases}$$

显然退化方程组

$$\bar{v}=0,\quad (\bar{u}^2-1)(\bar{u}-a(t))=0,\quad \sqrt{2}(\bar{u}-\bar{w})=0$$

有三组解

$\{\bar{u}=-1,\bar{v}=0,\bar{w}=-1\}$, $\{\bar{u}=1,\bar{v}=0,\bar{w}=1\}$, $\{\bar{u}=a(t),\bar{v}=0,\bar{w}=a(t)\}$.

我们将讨论从第一组退化解转移到第二组退化解所构成的阶梯状解. 这里

$$\begin{cases}\varphi_1(t)=-1,\\ \psi_1(t)=0,\\ \chi_1(t)=-1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\varphi_2(t)=1,\\ \psi_2(t)=0,\\ \chi_2(t)=1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

$M_1(-1,0,-1)$, $M_2(1,0,1)$ 分别是辅助方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{v},\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau}=(\tilde{u}^2-1)(\tilde{u}-a(\bar{t})),\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{w}}{\mathrm{d}\tau}=\sqrt{2}(\tilde{u}-\tilde{w})\end{cases}$$

的鞍点. 这可通过计算特征方程

$$[\lambda^2-(3\tilde{u}^2-1-2a\tilde{u})](-\sqrt{2}-\lambda)=0.$$

的根来确定.

在 M_1 上特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2+2a},\qquad \lambda_3=-\sqrt{2};$

在 M_2 上特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2-2a},\qquad \lambda_3=-\sqrt{2}.$

所以属于情况 $M_1[-,-,+]$, $M_2[-,-,+]$. 考虑到辅助方程中第一, 第二个方程与第三个方程可分离, 所以通过对第一, 第二个方程进行积分可得经过 M_1 的轨线

$$\tilde{v}^2=2\int_{-1}^{\tilde{u}}(u^2-1)(u-a(\bar{t}))\mathrm{d}u$$

和经过 M_2 的轨线

$$\tilde{v}^2=2\int_{1}^{\tilde{u}}(u^2-1)(u-a(\bar{t}))\mathrm{d}u.$$

确定 t_0 的方程为

$$\int_{-1}^{1}(u^2-1)(u-a(t_0))\mathrm{d}u=0,$$

即 $a(t_0)=0$, 而 $v_0=[2\int_{-1}^{u_0}(u^2-1)(u-a(\bar{t}))\mathrm{d}u]^{\frac{1}{2}}$.

往下写出确定转移层主项所满足的方程和边值

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{v},\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{u}(\tilde{u}^2-1),\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{w}}{\mathrm{d}\tau}=\sqrt{2}(\tilde{w}-\tilde{u}),\\ \tilde{u}(0)=u_0,\quad \tilde{v}(-\infty)=0,\quad \tilde{w}(-\infty)=-1.\end{cases}$$

解得

$$\tilde{u}(\tau)=\frac{-1+Ce^{\sqrt{2}\tau}}{1+Ce^{\sqrt{2}\tau}},\quad \tilde{v}(\tau)=\frac{2\sqrt{2}Ce^{\sqrt{2}\tau}}{1+Ce^{\sqrt{2}\tau}},\quad \tau=\frac{t-t_0}{\mu},$$

$$\tilde{w}(\tau)=(w_0-1)e^{-\sqrt{2}\tau}+1-\frac{2}{C}e^{-\sqrt{2}\tau}\ln\left(\frac{1+Ce^{\sqrt{2}\tau}}{2+C}\right).$$

其中 $C=(1+u_0)/(1-u_0)$, u_0 是任意的, 但 $-1<u_0<1$.

可见

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tilde{u}(\tau)=-1,\quad \lim_{\tau\to-\infty}\tilde{v}(\tau)=0,\quad \lim_{\tau\to-\infty}\tilde{w}(\tau)=-1,$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\tilde{u}(\tau)=1,\quad \lim_{\tau\to\infty}\tilde{v}(\tau)=0,\quad \lim_{\tau\to\infty}\tilde{w}(\tau)=1.$$

此外, 在 $t=0$, $t=1$ 处边界层函数分别由下面方程组和定解条件确定

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{u}}{d\tau_0}=\tilde{v},\quad \dfrac{d\tilde{v}}{d\tau_0}=(\tilde{u}^2-1)(\tilde{u}-a(0)),\\ \dfrac{d\tilde{w}}{d\tau_0}=\sqrt{2}(\tilde{w}-\tilde{u}),\\ \tilde{u}(0)=u_0,\quad \tilde{w}(0)=w^0,\quad \tau_0=\dfrac{t}{\mu},\\ \tilde{u}(\infty)=-1,\quad \tilde{v}(\infty)=0,\quad \tilde{w}(\infty)=-1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{u}}{d\tau_1}=\tilde{v},\quad \dfrac{d\tilde{v}}{d\tau_1}=(\tilde{u}^2-1)(\tilde{u}-a(1)),\\ \dfrac{d\tilde{w}}{d\tau_1}=\sqrt{2}(\tilde{w}-\tilde{u}),\\ \tilde{u}(1)=u^1,\quad \tau_1=\dfrac{t-1}{\mu},\\ \tilde{u}(-\infty)=1,\quad \tilde{v}(-\infty)=0,\quad \tilde{w}(-\infty)=1.\end{cases}$$

5.4 奇性相同的两个二阶奇摄动问题边值问题的内部层

5.4.1 问题的提出

我们将讨论下面边值问题 [12]

$$\begin{cases}\mu^2\dfrac{d^2u}{dt^2}=F(u,v,t),\\ \mu^2\dfrac{d^2v}{dt^2}=G(u,v,t),\quad 0<t<1, & (5.128)\\ u(0,\mu)=u^0,\quad v(0,\mu)=v^0,\quad u(1,\mu)=u^1,\quad v(1,\mu)=v^1. & (5.129)\end{cases}$$

$[H_{5.20}]$ 假设 $F(u,v,t)$, $G(u,v,t)$ 是某个复数解析函数 $\Phi(z,t)$ 的实部和虚部. 由解析函数性质可知

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial G}{\partial v},\quad \frac{\partial F}{\partial v}=-\frac{\partial G}{\partial u}.$$

对固定 t 和自变量 $\tau = (t - t_0)/\mu$ 有两个首次积分

$$
\begin{aligned}
&\frac{\tilde{p}^2 - \tilde{q}^2}{2} = \int F\,\mathrm{d}u - G\,\mathrm{d}v + C_1 = H_1(\tilde{u}, \tilde{v}, t) + C_1, \quad \tilde{p} = \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau}, \\
&\tilde{p}\tilde{q} = \int G\,\mathrm{d}u + F\,\mathrm{d}v + C_2 = H_2(\tilde{u}, \tilde{v}, t) + C_2, \quad \tilde{q} = \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau}.
\end{aligned}
\tag{5.130}
$$

$[\mathrm{H}_{5.21}]$ 假设退化方程组 $F(u, v, t) = 0$, $G(u, v, t) = 0$ 有两个解 $u = \varphi_1(t)$, $v = \psi_1(t)$, $u = \varphi_2(t)$, $v = \psi_2(t)$, 并且下面矩阵的特征值非负和不为零

$$
\begin{pmatrix} F_u(\varphi_k, \psi_k, t) & F_v(\varphi_k, \psi_k, t) \\ G_u(\varphi_k, \psi_k, t) & G_v(\varphi_k, \psi_k, t) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2. \tag{5.131}
$$

这就意味着把 (5.128) 写成四阶方程组时, 平衡点 $M_1(\varphi_1, \psi_1, 0, 0)$, $M_2(\varphi_2, \psi_2, 0, 0)$ 是鞍点. 从 (5.130) 可得经过鞍点的表达式

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\tilde{p}^2 - \tilde{q}^2) = \int_{(\varphi_k, \psi_k)}^{(\tilde{u}, \tilde{v})} F\mathrm{d}u - G\mathrm{d}v = H_1(\tilde{u}, \tilde{v}, t) - H_1(\varphi_k, \psi_k, t), \\
&\tilde{p}\,\tilde{q} = \int_{(\varphi_k, \psi_k)}^{(\tilde{u}, \tilde{v})} G\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v = H_2(\tilde{u}, \tilde{v}, t) - H_2(\varphi_k, \psi_k, t).
\end{aligned}
\tag{5.132}
$$

由此可得存在连接两鞍点 M_1, M_2 轨线的必要条件

$$
\begin{aligned}
&H_1(\varphi_1, \psi_1, t_0) - H_1(\varphi_2, \psi_2, t_0) = 0, \\
&H_2(\varphi_1, \psi_1, t_0) - H_2(\varphi_2, \psi_2, t_0) = 0.
\end{aligned}
\tag{5.133}
$$

可见要求 u, v 都有阶梯状是不可能的, 因为要求 t_0 同时满足两个方程 (5.133), 但是有时候 (5.133) 是相容的. 这可参看下面列子.

例 5.4 考虑方程组

$$
\begin{cases}
\mu^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = u^3 - 3uv^2 - a(t)(u^2 - v^2) - u + a(t), \\
\mu^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = 3u^2 v - v^3 - 2a(t)uv - v, \quad 0 < t < 1.
\end{cases}
\tag{5.134}
$$

退化方程有下面根

1) $v = 0$, $u = a$, $\lambda_{1,2} = -a^2 - 1 < 0$. 条件 $[\mathrm{H}_{5.21}]$ 不满足.
2) $v = 0$, $u = 1$, $\lambda_{1,2} = 2(1 - a) > 0$, $a < 1$, 条件 $[\mathrm{H}_{5.21}]$ 满足.
3) $v = 0$, $u = -1$, $\lambda_{1,2} = (a + 1) > 0$, $a > -1$, 条件 $[\mathrm{H}_{5.21}]$ 满足.

当 $|a| < 1$ 时, 有两个鞍点, 对应于 (5.130) 有

$$
\begin{aligned}
&H_1 = \frac{1}{4}(\tilde{u}^4 + \tilde{v}^4) - \frac{3}{2}\tilde{u}^2\tilde{v}^2 - \frac{a}{3}\tilde{u}^3 + a\tilde{v}^2\tilde{u} + \frac{1}{2}(\tilde{v}^2 - \tilde{u}^2) + a\tilde{u}, \\
&H_2 = \tilde{H}^3\tilde{v} - \tilde{u}\tilde{v}^3 - a\tilde{u}^2\tilde{v} + \tilde{u} - \tilde{u}\tilde{v} - \frac{a}{3}\tilde{v}^3 + a\tilde{v}.
\end{aligned}
$$

方程 (5.133) 此时为

$$
\begin{aligned}
H_1|_{(-1,0)}^{(1,0)} &= [\frac{1}{4} - \frac{1}{3}a(t) - \frac{1}{2} + a(t)] - [\frac{1}{4} + \frac{1}{3}a(t) - \frac{1}{2} + a(t)] = \frac{1}{3}a(t), \\
H_2|_{(-1,0)}^{(1,0)} &= 0 - 0 = 0.
\end{aligned}
\tag{5.135}
$$

因为 (5.135) 的第二个方程恒为零, 所以 t_0 由 $a(t_0) = 0$ 求得. 找到 t_0 后 (5.132) 可写成

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\tilde{p}^2 - \tilde{q}^2) = H_1 \,|_{(\varphi_1,\psi_1)}^{(\tilde{u},\tilde{v})} = A, \\
\tilde{p}\,\tilde{q} = H_2 \,|_{(\varphi_1,\psi_1)}^{(\tilde{u},\tilde{v})} = B.
\end{aligned}
\tag{5.136}
$$

从 (5.136) 解得

$$
\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau} = \pm[A + \sqrt{A^2 + B^2}]^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\pm B}{[A + \sqrt{A^2 + B^2}]^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.137}
$$

给出初始条件 $\tilde{u}\,|_{\tau=0} = u_0$, $\tilde{v}\,|_{\tau=0} = v_0$ 后方程组 (5.137) 是可积的, 其中 $\varphi_1(t_0) < u_0 < \varphi_2(t_0)$, $\psi_1(t_0) < v_0 < \psi_2(t_0)$. 符号 $\pm$ 按根之间的转移要求选取.

如果使用复数记法, 则上述运算可简化. 这时 (5.128) 可写成

$$
\mu^2 \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \Phi(z, t). \tag{5.138}
$$

(5.130) 可表示成

$$
\frac{1}{2}\tilde{w}^2 = \int \Phi(z, t)\mathrm{d}z + C = H + C, \quad \tilde{w} = \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau}, \quad \tau = \frac{t - t_0}{\mu}. \tag{5.139}
$$

例 5.4 可写成

$$
\mu^2 \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = (z^2 - 1)(z - a(t)) = z^3 - a(t)z^2 - z + a(t), \tag{5.140}
$$

而 (5.139) 表示为

$$
\frac{1}{2}\tilde{w}^2 = \frac{1}{4}\tilde{z}^4 - \frac{1}{3}a(t)\tilde{z}^3 - \frac{1}{2}\tilde{z}^2 + a(t)\tilde{z} = H(\tilde{z}, t).
$$

退化方程根为 $z_1 = 1$, $z_2 = -1$. 方程组 (5.133) 有一个复形式

$$
H(z_1, t) - H(z_2, t) = 0.
$$

分离实部和虚部可得 $a(t_0) = 0$. (5.136) 可写成

$$
\frac{1}{2}\tilde{w}^2 = (\frac{1}{4}\tilde{z}^4 - \frac{1}{3}a\tilde{z}^3 - \frac{1}{2}\tilde{z}^2 + a\tilde{z})\,|_{a=0,\tilde{z}=-1}^{a=0,\tilde{z}=1} = \frac{1}{4}(\tilde{z}^2 - 1)^2.
$$

(5.137) 可写成

$$
\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{z}^2 - 1).
$$

令 $z_0 = iv_0$, 为了进一步得到解在内部层附近的渐近表达式 ($u_0 = 0$), 解得

$$\tilde{z} = \frac{(1+z_0)-(1-z_0)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\tau}}{1+z_0+(1-z_0)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\tau}}. \tag{5.141}$$

分离实部和虚部

$$\tilde{u} = \frac{(1+v_0^2)[1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{2}\tau}]}{(1+\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\tau})^2+v_0^2(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\tau})^2}, \tag{5.142}$$

$$\tilde{v} = \frac{4v_0^2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\tau}}{(1+\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\tau})^2+v_0^2(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\tau})^2}. \tag{5.143}$$

显然

$$\lim_{\mu\to 0}\tilde{u} = \begin{cases}-1, & t<t_0,\\ 1, & t>t_0,\end{cases}\qquad \lim_{\mu\to 0}\tilde{v} = \begin{cases}0, & t<t_0,\\ 0, & t>t_0.\end{cases}$$

由此可见, 在本例中对分量 u 出现阶梯状解, 对分量 v 出现脉冲状解. 如果要使 v 有阶梯状解, 要求初值 v_0 在 $\psi_1(t_0)$, $\psi_2(t_0)$ 之间. 但在本例中 $\psi_1=\psi_2=0$. 所以无论怎样选取 v_0, 对 v 都不可能有阶梯状.

5.4.2 共轭系统

上节我们曾提到本文所讨论问题的特殊性, 即 t_0 应满足两个方程 (5.133)(或 (5.140)). 这似乎很别扭, 为此我们做进一步研究. 现在重新回到复方程 (5.138), 并认为自变量也应该是复数. 它们可以这样表述

$$\mu^2\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\xi^2} = \Phi(z,\xi),\quad z=u+iv,\quad \xi=x+iy. \tag{5.144}$$

该方程对应于两个实方程组

$$\begin{cases}\mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = F(u,v,x,y), & y\in(a,b),\\ \mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} = G(u,v,x,y), & x\in(0,1).\end{cases} \tag{5.145}$$

$$\begin{cases}\mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2} = -F(u,v,x,y), & x\in(0,1),\\ \mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}y^2} = -G(u,v,x,y), & y\in(a,b).\end{cases} \tag{5.146}$$

方程组 (5.146) 是 (5.145) 的共轭系统.

从方程 (5.144) 可得一系列关系式

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\xi}\Big)^2 &= \int\Phi(z,\xi)\mathrm{d}z + C\\ &= \int F\mathrm{d}u - G\mathrm{d}v + \int(G\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v)i + C\\ &= H(\tilde{u},\tilde{v},\xi)+C.\end{aligned}$$

求 ξ_0 的方程为

$$\int_{z_1(\xi_0)}^{z_2(\xi_0)} \Phi(z,\xi_0)\mathrm{d}z = 0, \tag{5.147}$$

它等价于下面方程组:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{(\varphi_1,\psi_1)}^{(\varphi_2,\psi_2)} F(u,v,x_0,y_0)\,\mathrm{d}u - G(u,v,x_0,y_0)\,\mathrm{d}v = 0, \\ \displaystyle\int_{(\varphi_1,\psi_1)}^{(\varphi_2,\psi_2)} G(u,v,x_0,y_0)\,\mathrm{d}u + F(u,v,x_0,y_0)\,\mathrm{d}v = 0. \end{cases} \tag{5.148}$$

方程的个数与自变量的个数一致, 这样看起来就自然了.

从 (5.147) 求出 ξ_0, 解下面方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\tau^2} = \Phi(\tilde{z},\xi_0), \quad \tau = \frac{\xi-\xi_0}{\mu}. \tag{5.149}$$

对固定的 x_0, y_0 可得对应于 (5.145) 的辅助系统解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau_x^2} = F(\tilde{u},\tilde{v},x_0,y_0), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau_x^2} = G(\tilde{u},\tilde{v},x_0,y_0), \quad \tau_x = \dfrac{x-x_0}{\mu}. \end{cases} \tag{5.150}$$

同样也可得相应于 (5.146) 的辅助系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau_y^2} = -F(\tilde{u},\tilde{v},x_0,y_0), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau_y^2} = -G(\tilde{u},\tilde{v},x_0,y_0), \quad \tau_y = \dfrac{y-y_0}{\mu}. \end{cases} \tag{5.151}$$

方程组 (5.150), (5.151) 的解表示的是问题 (5.145), (5.146) 的内部层.

例 5.5 讨论方程

$$\mu^2\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\xi^2} = (z^2-1)(z-a(\xi)),$$

其中 $a(\xi) = \alpha(x,y) + \beta(x,y)i$.

此时相应于方程组 (5.145) 为

$$\begin{cases} \mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = (u^2-v^2-1)(u-\alpha) - 2uv(v-\beta), \\ \mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = (u^2-v^2-1)(v-\beta) + 2uv(u-\alpha), \quad 0<x<1. \end{cases}$$

退化方程有三个根

1) $u=\alpha, v=\beta$; 2) $u=1, v=0$; 3) $u=-1, v=0$.

求 ξ_0 的方程为 $a(\xi_0)=0$, 即 $\alpha(x_0,y_0)=0$, $\beta(x_0,y_0)=0$.

如果 $\alpha(x,y)=x-y+0.2$, $\beta(x,y)=2x-y$, 则 $y_0=0.4$, $x_0=0.2$. 相应于 (5.150) 的解为

$$\begin{aligned}&\tilde{z}=[1-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\frac{\xi-\xi_0}{\mu}}][1+\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\frac{\xi-\xi_0}{\mu}}]^{-1}\\&\xi-\xi_0=(x-x_0)+(y-y_0)i,\quad \tilde{z}=\tilde{u}+\tilde{v}i.\end{aligned}\tag{5.152}$$

此时 $\tilde{u}=[1-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\frac{x-x_0}{\mu}i}][1+\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\frac{x-x_0}{\mu}i}]^{-1}$, $\tilde{v}=0$, 它对应于 u 从 -1 到 $+1$ 的跳跃. 对 $\tilde{v}$ 没有转移层. 在 (5.142), (5.143) 中令 $v_0=0$ 可得同样结果.

对应于 (5.151) 有

$$\tilde{v}=[1-\mathrm{e}^{\sqrt{2}\frac{y-y_0}{\mu}}][1+\mathrm{e}^{\sqrt{2}\frac{y-y_0}{\mu}}]^{-1}.$$

它表示振动过程, 没有 $\tilde{v}$ 从 -1 到 $+1$ 的转移层. 因为方程组 (5.151) 对应的特征值为负.

例 5.6 讨论方程

$$\mu^2\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\xi^2}=z(z+\varphi_1)(z-\varphi_1).$$

假设退化方程的根为 $\varphi_1(\xi)$ 和 $\varphi_2(\xi)$, 其中 $\varphi_1=-x+1+yi$, $\varphi_2=x+2(y-0.2)i$. 当 $\varphi=\varphi_1=\varphi_2$ 时 (5.147) 成立. 例如取 $x=0.5$, $y=0.4$. 而 $\varphi=0.5+0.4i$. 不妨令 $z_0=z(\xi_0)=0$, 可得

$$\tilde{z}=\varphi(\xi_0)[1-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\varphi(\xi_0)\frac{\xi-\xi_0}{\mu}}][1+\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\varphi(\xi_0)\frac{\xi-\xi_0}{\mu}}]^{-1},$$

$$\xi_0=\alpha+\beta i=0.5+0.4i.$$

分离实部和虚部可得 ($\Delta x=x-0.5$)

$$\tilde{u}=\frac{0.5[1-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\frac{\Delta x}{\mu}}]+0.8\mathrm{e}^{-0.5\sqrt{2}\frac{\Delta x}{\mu}}\sin(0.4\sqrt{2}\frac{\Delta x}{\mu})}{1+\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\frac{\Delta x}{\mu}}+2\mathrm{e}^{-0.5\sqrt{2}\frac{\Delta x}{\mu}}\cos(0.4\sqrt{2}\frac{\Delta x}{\mu})}.$$

显然

$$\lim_{\mu\to0}\tilde{u}=\begin{cases}-0.5, & x<x_0,\\ 0.5, & x>x_0.\end{cases}\qquad \lim_{\mu\to0}\tilde{v}=\begin{cases}-0.4, & x<x_0,\\ 0.4, & x>x_0.\end{cases}$$

该例与例 5.5 的不同之处在于对 $\tilde{v}$ 也存在跳跃. 这从 $\tilde{z}$ 的表达式

$$\tilde{z}=(0.5+0.4i)\frac{1-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}(0.5+0.4i)\frac{\Delta yi}{\mu}}}{1+\mathrm{e}^{-\sqrt{2}(0.5+0.4i)\frac{\Delta yi}{\mu}}},$$

可以看出

$$\lim_{\mu\to0}\tilde{z}=\begin{cases}0.5+0.4i, & y<y_0,\\ -0.5-0.4i, & y>y_0,\end{cases}$$

这里 $\Delta y = y - 0.4$.

从表达式可见 $\tilde{z}$ 趋向于极限并非单调. 在指数衰减项前有无穷大频率的振荡, 这是因为特征根既有实部又有虚部.

注释 5.11 这里是在内部层附近构造近似解, 利用复数表达式同样可以在端点构造边界层.

注释 5.12 利用复数表达式可简化计算, 但它不是必须的.

本节的重要结论在于当我们讨论两个二阶方程组时, 除了认为 x 是自变量还有参数 y. 在转移点 $x = x_0$ 确定时, 同时对应于参数值 $y = y_0$. 该参数值保证了在极限状态有跳跃, 而对其他的参数值方程组 (5.145) 可能没有转移解.

5.4.3 解的存在性

为明确起见仅讨论方程组 (5.145) 解的存在性, 因为对方程组 (5.146) 的讨论是完全类似的

$$\begin{cases} \mu^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = F(u, v, x, y), \\ \mu^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = G(u, v, x, y), \quad 0 < x < 1. \end{cases} \tag{5.153}$$

边值条件为

$$u(0, \mu) = u^0, \quad v(0, \mu) = v^0, \quad u(1, \mu) = u^1, \quad v(1, \mu) = v^1. \tag{5.154}$$

其中 x 是自变量而 y 是某个参数, $y \in [a, b]$.

条件 $[\mathrm{H}_{5.20}]$, $[\mathrm{H}_{5.21}]$ 仍旧保留, 但必须加上对一切参数值 $y \in [a, b]$ 都成立, 用 $[\mathrm{H}_{5.20}{}']$, $[\mathrm{H}_{5.21}{}']$ 来记.

$[\mathrm{H}_{5.22}]$ 假设下面方程组

$$K_1(x, y) = \int_{(\varphi_1, \psi_1)}^{(\varphi_2, \psi_2)} F(u, v, x, y)\mathrm{d}u - G(u, v, x, y)\mathrm{d}v = 0, \tag{5.155}$$

$$K_2(x, y) = \int_{(\varphi_1, \psi_1)}^{(\varphi_2, \psi_2)} G(u, v, x, y)\mathrm{d}u + F(u, v, x, y)\mathrm{d}v = 0 \tag{5.156}$$

关于 x, y 可解 $x = x_0 \in (0, 1)$, $y = y_0 \in (a, b)$. 并且

$$\Delta = \frac{D(K_1, K_2)}{D(x, y)} \Big|_{x = x_0, y = y_0} \neq 0. \tag{5.157}$$

注释 5.13 行列式 (5.157) 可写成

$$\begin{aligned} \Delta = &[H_{1x}(\varphi_2, \psi_2, x_0, y_0) - H_{1x}(\varphi_1, \psi_1, x_0, y_0)]^2 \\ &-[H_{1y}(\varphi_2, \psi_2, x_0, y_0) - H_{1y}(\varphi_1, \psi_1, x_0, y_0)]^2. \end{aligned}$$

同样 Δ 可以通过 $[\mathrm{H}_{5.21}]$ 的导数表示, 复数表示式 (5.157) 也可这样写

$$\frac{\partial H}{\partial \xi}(z_1(\xi_0,\xi_0)) - \frac{\partial H}{\partial \xi}(z_2(\xi_0,\xi_0)) \neq 0.$$

这里 $H(\cdot)$ 由 (5.139) 确定, 但认为已有参数 y 加入, 并且 $H_1 = \mathrm{Re}H$, $H_2 = \mathrm{Im}H$.

在上述条件之下可以证明问题 (5.153), (5.154) 具有内部层解存在. 方法类似于对一个方程的情况. 把内部层解看成是两个纯边界层解得光滑连接. 这两个纯边界层解分别记为 $u^{(-)}(x,\mu)$, $v^{(-)}(x,\mu)$ 和 $u^{(+)}(x,\mu)$, $v^{(+)}(x,\mu)$, 他们可看作是下面左右问题的解.

左问题: 对方程组 (5.153) 给出下面边值:

$$u^{(-)}(0,\mu) = u^0, \quad v^{(-)}(0,\mu) = v^0, \quad u^{(-)}(x^*,\mu) = u_0, \quad v^{(-)}(x^*,\mu) = v_0. \tag{5.158}$$

右问题: 对方程组 (5.153) 给出另外边值:

$$u^{(+)}(x^*,\mu) = u_0, \quad v^{(+)}(x^*,\mu) = v_0, \quad u^{(+)}(1,\mu) = u^1, \quad v^{(+)}(1,\mu) = v^1. \tag{5.159}$$

对 u_0, v_0 有要求 $\varphi_1(x^*) < u_0 < \varphi_2(x^*)$ 和 $\psi_1(x^*) < v_0 < \psi_2(x^*)$. $x^* \in (0,1)$ 是暂时未知参数, 同样 $y^* \in (a,b)$ 也是未知参数. 当然解 $u^{(\pm)}(x,\mu)$ 还依赖于参数 y, 只是不写而已.

从 [1] 不难得出左右问题解的存在性, 特别当 $0 < x < x^*$ 时

$$\lim_{\mu\to 0} u^{(-)}(x,\mu) = \varphi_1(x), \quad \lim_{\mu\to 0} v^{(-)}(x,\mu) = \psi_1(x).$$

当 $x^* < x < 1$ 时

$$\lim_{\mu\to 0} u^{(+)}(x,\mu) = \varphi_2(x), \quad \lim_{\mu\to 0} v^{(+)}(x,\mu) = \psi_2(x).$$

为了把得到的解变成问题 (5.153), (5.154) 的解, 需要光滑连接 $u^{(\pm)}$ 和 $v^{(\pm)}$. 边值条件 (5.158), (5.159) 说明该解是连续的, 同时还要求导数连续, 即

$$\begin{aligned} \mu\frac{\mathrm{d}u^{(-)}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x^*} - \mu\frac{\mathrm{d}u^{(+)}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x^*} &= 0, \\ \mu\frac{\mathrm{d}v^{(-)}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x^*} - \mu\frac{\mathrm{d}v^{(+)}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x^*} &= 0. \end{aligned} \tag{5.160}$$

这里引入 μ 是为了计算方便, 因为当 $\mu \to 0$ 时 $u^{(\pm)}$, $v^{(\pm)}$ 关于 x 的导数是无界的.

方程组 (5.160) 是确定转移点 x^*, y^* 的, 它保证了阶梯状解的存在性.

利用边界层函数法, 把 x^*, y^* 也展开成 μ 的幂级数

$$x^*(\mu) = x_0 + \mu x_1 + \cdots, \quad y^*(\mu) = y_0 + \mu y_1 + \cdots. \tag{5.161}$$

(5.160) 的渐近式为 $(\tau_x = (x - x^*)/\mu)$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\tilde{u}^{(-)}}{\mathrm{d}\tau_x}\mid_{\tau_x=0} - \frac{\mathrm{d}\tilde{u}^{(+)}}{\mathrm{d}\tau_x}\mid_{\tau_x=0} + O(\mu) = 0, \\ &\frac{\mathrm{d}\tilde{v}^{(-)}}{\mathrm{d}\tau_x}\mid_{\tau_x=0} - \frac{\mathrm{d}\tilde{v}^{(+)}}{\mathrm{d}\tau_x}\mid_{\tau_x=0} + O(\mu) = 0. \end{aligned} \tag{5.162}$$

这里 $\tilde{u}^{(\pm)}$, $\tilde{v}^{(\pm)}$ 是 (5.150) 的解, 并满足下面条件

$$\begin{aligned} &\tilde{u}^{(\pm)}\mid_{x=x^*} = u_0, \quad \tilde{v}^{(\pm)}\mid_{x=x^*} = v_0, \\ &\tilde{u}^{(-)}\mid_{\tau_x=-\infty} = \varphi_1(x^*, y^*), \quad \tilde{u}^{(+)}\mid_{\tau_x=\infty} = \varphi_2(x^*, y^*), \\ &\tilde{v}^{(-)}\mid_{\tau_x=-\infty} = \psi_1(x^*, y^*), \quad \tilde{v}^{(+)}\mid_{\tau_x=\infty} = \varphi_2(x^*, y^*). \\ &\tilde{u}_x^{(-)}(-\infty) = \tilde{v}_x^{(-)}(-\infty) = \tilde{u}_x^{(+)}(\infty) = \tilde{v}_x^{(+)}(\infty) = 0. \end{aligned}$$

根据 (5.132) 在 (5.162) 中导数有下面关系式

$$\begin{cases} (\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}^{(-)}}{\mathrm{d}\tau_x})^2 - (\dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}^{(-)}}{\mathrm{d}\tau_x})^2 = 2\displaystyle\int_{(\varphi_1,\psi_1)}^{(\tilde{u}^{(-)},\tilde{v}^{(-)})} F(u, v, x^*, y^*)\,\mathrm{d}u - G(u, v, x^*, y^*)\,\mathrm{d}v, \\ (\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}^{(-)}}{\mathrm{d}\tau_x})(\dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}^{(-)}}{\mathrm{d}\tau_x}) = \displaystyle\int_{(\varphi_1,\psi_1)}^{(\tilde{u}^{(-)},\tilde{v}^{(-)})} G(u, v, x^*, y^*)\,\mathrm{d}u - F(u, v, x^*, y^*)\,\mathrm{d}v, \end{cases} \tag{5.163}$$

如果把积分下限 (φ_1, ψ_1) 换成 (φ_2, ψ_2) 则所得的类似关于式子对于 $(+)$ 也成立.

表达式 (5.162) 的零次近似

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}^{(-)}}{\mathrm{d}\tau_x}\mid_{\tau_x=0} - \frac{\mathrm{d}\tilde{u}^{(+)}}{\mathrm{d}\tau_x}\mid_{\tau_x=0} = \frac{\mathrm{d}\tilde{v}^{(-)}}{\mathrm{d}\tau_x}\mid_{\tau_x=0} - \frac{\mathrm{d}\tilde{v}^{(+)}}{\mathrm{d}\tau_x}\mid_{\tau_x=0} = 0.$$

从 (5.163) 可得下面方程组

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{(\varphi_2(x^*,y^*),\psi_2(x^*,y^*))}^{(\varphi_1(x^*,y^*),\psi_1(x^*,y^*))} F(u, v, x^*, y^*)\mathrm{d}u - G(u, v, x^*, y^*)\mathrm{d}v = 0, \\ \displaystyle\int_{(\varphi_2(x^*,y^*),\psi_2(x^*,y^*))}^{(\varphi_1(x^*,y^*),\psi_1(x^*,y^*))} G(u, v, x^*, y^*)\mathrm{d}u + F(u, v, x^*, y^*)\mathrm{d}v = 0. \end{cases} \tag{5.164}$$

条件 $[\mathrm{H}_{5.22}]$ 保证了方程组 (5.164) 有解: $x^* = x_0$, $y^* = y_0$.

方程组 (5.162) 有下面类型

$$M_i(x^*, y^*, \mu) = M_{i0}(x^*, y^*) + O(\mu) = 0, \quad i = 1, 2.$$

由 $[\mathrm{H}_{5.22}]$ 可得 $M_{i0}(x_0, y_0) = 0$, $\dfrac{D(M_1, M_2)}{D(x^*, y^*)}\mid_{x^*=x_0, y^*=y^0} \neq 0$. 利用隐函数定理, 最终可求得 $x^*(\mu) = x_0 + O(\mu)$, $y^*(\mu) = y_0 + O(\mu)$.

这样参数值 x^*, y^* 就确定了. 这时左右问题的解是光滑连接的. 它们就构成了问题 (5.153), (5.154) 的阶梯状解, 也就是下面定理

定理 5.7 存在参数值 $y = y^*(\mu) = y_0 + O(\mu)$, 使得问题 (5.153), (5.154) 的解 $u(x,\mu)$, $v(x,\mu)$ 存在, 且有下面极限表达式

$$\lim_{\mu\to 0} u(x,\mu) = \begin{cases} \varphi_1(x,y_0), & 0 < x < x_0, \\ \varphi_2(x,y_0), & x_0 < x < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{\mu\to 0} v(x,\mu) = \begin{cases} \psi_1(x,y_0), & 0 < x < x_0, \\ \psi_2(x,y_0), & x_0 < x < 1. \end{cases}$$

上面 x_0, y_0 由方程组 (5.155), (5.156) 确定.

值得一提的是利用复数表达式, 无论是从代数方程求出 x_0, y_0, 还是从非线性微分方程求边界函数及内部层函数都比较简单, 在例 5.2 中已说明了这点.

第六章　脉冲状空间对照结构型解

6.1 半线性问题中的脉冲状解

6.1.1 问题的提出

我们将讨论二阶半线性方程边值问题 ($\mu > 0$— 小参数)[13]

$$\begin{cases} \mu^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = F(u, t, \mu), \quad 0 < t < 1, & (6.1) \\ u(0, \mu) = u(1, \mu) = 0\,. & (6.2) \end{cases}$$

当退化方程 $F(u, t, 0) = 0$ 的根 $u = \alpha(t)$ 是辅助方程的鞍点, 并且存在同宿轨道时, 问题 (6.1), (6.2) 可能有内部转移层的解, 即脉冲解. 我们将构造该问题的渐近解, 证明脉冲解的存在性和进行余项估计. 这种解在化学的自组织理论中有很重要的意义, 它们被称为空间对照结构.

6.1.2 渐近解的算法

往下将用边界层函数法构造渐近解. 要求函数 F 是足够光滑的. 为了表述简单起见, 仅限于讨论在区间 $[0, 1]$ 上只有一个脉冲结构的转移点 t_*. 如果有几个这样点的话讨论方法完全类似.

我们将认为在点 t_* 函数 $u(t, \mu)$ 取得极值, 那么

$$u'(t_*, \mu) = 0. \tag{6.3}$$

假设 t_* 的值有下面表达式

$$t_* = t_0 + \mu t_1 + \cdots + \mu^k t_k + \cdots\,. \tag{6.4}$$

根据边界层函数法, 问题 (6.1), (6.2) 的渐近解为

$$u = \bar{u} + \Pi u + Qu + Ru, \tag{6.5}$$

其中

$$\bar{u} = \bar{u}_0(t) + \mu\bar{u}_1(t) + \cdots$$

是正则级数;

$$\Pi u = \Pi_0 u(\tau_0) + \mu\Pi_1 u(\tau_0) + \cdots$$

是在点 $t = 0(\tau_0 = t/\mu)$ 邻域的边界层级数;

$$Qu = Q_0 u(\tau) + \mu Q_1 u(\tau) + \cdots$$

是在点 $t = t_*(\tau = (t - t_*)/\mu)$ 附近产生脉冲现象的级数;

$$Ru = R_0 u(\tau_1) + \mu R_1 u(\tau_1) + \cdots$$

则是在点 $t = 1(\tau_1 = (t-1)/\mu)$ 附近的边界层级数.

把 (6.5) 代入 (6.1), (6.2), 并把 $F(\bar{u} + \Pi u + Qu + Ru, t, \mu)$ 表示成 $F = \bar{F} + \Pi F + QF + RF$, 类似于前几章的做法可得确定渐近解各项的方程.

确定 $\bar{u}_0$ 的方程为

$$F(\bar{u}_0, t, 0) = 0. \tag{6.6}$$

[$H_{6.1}$] 假设方程 $F(u,t,0) = 0$ 在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时有两个解 $u = \alpha(t)$ 和 $u = \gamma(t)$ (为确定起见 $\alpha(t) < \gamma(t)$), 并且

$$F_u(\alpha(t), t, 0) > 0, \quad F_u(\gamma(t), t, 0) < 0 \tag{6.7}$$

(方程 $F(u,t,0) = 0$ 还可以有其他的解, 但是在构造渐近解时只用到 $\alpha(t)$).

此外, 假设存在另一函数 $\beta(t)$, 它满足

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(u,t,0)\,\mathrm{d}u = 0.$$

由条件 [$H_{6.1}$] 可知在辅助方程相平面上有从鞍点 $(\alpha(t), 0)$ 走出的轨线, 它绕过平衡点 $(\gamma(t), 0)$ 重新回到原来的鞍点, 即同宿轨道. 在点 $(\beta(t), 0)$ 轨线与 u 轴相交.

选取 $\bar{u}_0 = \alpha(t)$. 正则级数高阶项 $\bar{u}_k(t)(k \geqslant 1)$ 由下面方程容易确定

$$\bar{u}_1 = -\bar{F}_u^{-1}\bar{F}_\mu, \quad \bar{u}_2 = \bar{F}_u^{-1}(\alpha'' - \frac{1}{2}\bar{F}_{uu}\bar{u}_1^2 - \bar{F}_{u\mu}\bar{u}_1 - \frac{1}{2}\bar{F}_{\mu\mu}), \cdots$$

"−" 其表示函数 F 的导数在点 $(\alpha(t), t, 0)$ 处计算.

往下将在点 t_* 的邻域讨论描述脉冲状解的边界函数 $Q_k u$. 确定 $Q_0 u$ 的方程和定解条件为 $(\alpha_0 = \alpha(t_0))$, $-\infty < \tau < +\infty$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 Q_0 u}{\mathrm{d}\tau^2} = F(\alpha_0 + Q_0 u, t_0, 0) - F(\alpha_0, t_0, 0), \\ Q_0' u(0) = 0, \quad Q_0 u(\mp\infty) = 0, \end{cases} \tag{6.8}$$

其中 $Q_0' u(0) = 0$ 是从 (6.3) 得到的. 方程 (6.8) 包含暂时还未知的量 t_0. 同宿轨的上半支和下半支相应于方程

$$Q_0' u = \pm \left[2 \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + Q_0 u} F(\xi, t_0, 0)\, \mathrm{d}\xi \right]^{\frac{1}{2}} \equiv \pm \Phi(Q_0 u). \tag{6.9}$$

当 $\tau \leqslant 0$ 时, 用初始条件 $Q_0 u(0) = \beta_0 - \alpha_0$, 解方程 (6.9) 取 "+"; 当 $\tau \geqslant 0$ 用同样的初始条件 $Q_0 u(0) = \beta_0 - \alpha_0$ 求解方程 (6.9) 取 "−".

方程 (6.9) 取 "+" 的平衡点 $Q_0 u = 0$ 当 $\tau \to -\infty$ 时是渐近稳定的. 这是因为由洛必达法则可得 $\Phi'(0) = [F_u(\alpha_0, t_0, 0)]^{\frac{1}{2}} > 0$. 所以对 $Q_0 u$ 有通常的指数估计

$$|Q_0 u(\tau)| \leqslant C \mathrm{e}^{\kappa\tau}, \quad \tau \leqslant 0$$

(C 和 κ 是某个正数). 当 $\tau \geqslant 0$ 时, 可以得到类似的指数估计

$$|Q_0 u(\tau)| \leqslant C \mathrm{e}^{-\kappa\tau}, \quad \tau \geqslant 0.$$

这样 $Q_0 u(\tau)$ 就完全确定了. 需要指出的是, t_0 暂时没有确定, 而 $Q_0 u$ 依赖于 t_0. 并且 $Q_0 u(\tau)$ 是偶函数, 即 $Q_0 u(\tau) = Q_0 u(-\tau)$.

对 $Q_1 u$ 有下面的方程和定解条件

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 Q_1 u}{\mathrm{d}\tau^2} = F_u(\tau) Q_1 u + F_1(\tau), \\ Q_1' u(0) = -\bar{u}_0'(t_0), \quad Q_1 u(\mp\infty) = 0, \end{cases} \tag{6.10}$$

其中

$$F_1(\tau) = [F_u(\tau)\alpha'(t_0) + F_t(\tau)](t_1 + \tau) + [F_u(\tau)\bar{u}_1(t_0) + F_\mu(\tau)],$$

而 $F_u(\tau)$, $F_t(\tau)$ 和 $F_\mu(\tau)$ 都在点 $(\alpha_0 + Q_0 u(\tau), t_0, 0)$ 计算.

请注意相应于 (6.10) 的齐次方程具有满足条件 $Y_1(0) = 0$, $Y_1(-\infty) = 0$, $Y_1(\infty) = 0$ 的非平凡解 $Y_1(\tau) = Q_0' u(\tau)$. 这只要对微分方程 (6.8) 求导就可得到. 所以非齐次边值问题 (6.10) 如果要有非平凡解的话必须满足可解性条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau) Q_0' u(\tau) \mathrm{d}\tau = 0 \tag{6.11}$$

(这也是方程 (6.10) 右端的非齐次项与相应的齐次方程的解 $Y_1(\tau) = Q_0' u(\tau)$ 正交).

并且 $Q_1 u(\tau)$ 在 $\tau=0$ 的值由下面公式计算

$$\begin{aligned} Q_1 u(0) &= -\frac{1}{F(\beta_0, t_0, 0)} \int_{-\infty}^{0} F_1(\tau) Q_0' u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{1}{F(\beta_0, t_0, 0)} \int_{\infty}^{0} F_1(\tau) Q_0' u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{6.12}$$

为化简积分 (6.11) 把 $F_1(\tau)$ 分成两部分:

$$\begin{aligned} F_1(\tau) &= [F_u(\tau)\alpha'(t_0) + F_t(\tau)]\tau + [F_u(\tau)\alpha'(t_0) + F_t(\tau)]t_1 + [F_u(\tau)\bar{u}_1(t_0) + F_\mu(\tau)] \\ &\equiv F_{11}(\tau) + F_{12}(\tau). \end{aligned}$$

因为 $Q_0 u(\tau)$ 是偶函数, 所以 $F_{11}(\tau)$ 是奇函数, 而 $F_{12}(\tau)$ 是偶函数. 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{12}(\tau) Q_0' u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0,$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{11}(\tau) Q_0' u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 2\int_{-\infty}^{0} [F_u(\tau)\alpha'(t_0) + F_t(\tau)]\tau Q_0' u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

因此方程 (6.11) 可以化成

$$\int_{-\infty}^{0} [F_u(\tau)\alpha'(t_0) + F_t(\tau)]\tau Q_0' u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0. \tag{6.13}$$

方程 (6.13) 就是确定 t_0 的方程. 从 (6.9) 第一式有

$$\tau = \int_{\beta_0 - \alpha_0}^{Q_0 u} \frac{\mathrm{d}s}{\Phi(s)} = \int_{\beta_0}^{\alpha_0 + Q_0 u} \frac{\mathrm{d}s}{\left[2\int_{\alpha_0}^{s} F(\xi, t_0, 0)\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

利用这个关系式把方程 (6.13) 化成

$$G(t_0) \equiv \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} [F_u(u, t_0, 0)\alpha'(t_0) + F_t(u, t_0, 0)] \int_{\beta(t_0)}^{u} \frac{\mathrm{d}s}{\left[2\int_{\alpha(t_0)}^{s} F(\xi, t_0, 0)\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}u. \tag{6.14}$$

[$H_{6.2}$] 假设方程 (6.14) 有解 $t_0 \in (0,1)$, 并且 $G'(t_0) \neq 0$.

现在可以肯定问题 (6.10) 的解是存在的. 为此我们先构造相应于 (6.10) 的齐次方程的基本解组. 其中一个解我们取 $Y_1(\tau) = Q_0' u(\tau)$. 另一个与 $Y_1(\tau)$ 线性无关的解 $Y_2(\tau)$ 由已知公式 $Y_2 = Y_1(\tau)\int_0^{\tau} Y_1^{-2}(s)\,\mathrm{d}s$ 可以得到. 可以看出当 $\tau \to 0$ 时 $Y_2(\tau)$ 和其导数是有界的, 并且 $Y_2(0) = -1/F(\beta_0, t_0, 0)$, 当 $\tau \to -\infty$ 时解 $Y_2(\tau)$ 是指数增长的. 这是因为

$$\lim_{\tau \to -\infty} Y_1(\tau) Y_2(\tau) = -\frac{1}{2}\left[F_u(\alpha_0, t_0, 0)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

而当 $\tau \to -\infty$ 时

$$Y_1(\tau) = [F_u(\alpha_0, t_0, 0)]^{\frac{1}{2}}(Q_0 u + o(Q_0 u)),$$

所以

$$Y_2(\tau) = -\frac{1}{2}F_u(\alpha_0, t_0, 0)[Q_0u + o(Q_0u)].$$

利用 Y_1 和 Y_2 可以构造出当 $-\infty < \tau \leqslant 0$ 时方程 (6.10) 的特解:

$$\tilde{Q}_1u = -Y_1(\tau)\int_0^\tau Y_2(s)F_1(s)\mathrm{d}s + Y_2(\tau)\int_{-\infty}^\tau Y_1(s)F_1(s)\mathrm{d}s,$$

显然 $\tilde{Q}_1u$ 满足

$$\tilde{Q}_1u(0) = Y_2(0)\int_{-\infty}^0 Y_1(s)F_1(s)\,\mathrm{d}s = \frac{-1}{F(\beta_0, t_0, 0)}\int_{-\infty}^0 Y_1(s)F_1(s)\,\mathrm{d}s.$$

引理 6.1 边界层函数 $\tilde{Q}_1u$ 满足下面不等式

$$|\tilde{Q}_1u| \leqslant C\mathrm{e}^{\kappa\tau}, \quad \tau \leqslant 0.$$

从 $F_1(\tau)$ 的表达式可见

$$|F_1(\tau)| \leqslant (a + b|\tau|)Q_0u(\tau),$$

其中 a, b 都是常数. 而 $|Y_2(\tau)| \leqslant C[Q_0u(\tau)]^{-1}$, 所以当 $\tau \to -\infty$ 时 $\tilde{Q}_1u$ 中的第一项 $-Y_1(\tau)\displaystyle\int_0^\tau Y_2(s)F_1(s)\,\mathrm{d}s$ 是指数趋向零. 再看表示式 $\tilde{Q}_1u$ 中第二项的积分

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^\tau Y_1(s)F_1\,\mathrm{d}s\right| &\leqslant \left|\int_0^{Q_0u}(a + b|s|Q_0u\,\mathrm{d}Q_0u)\right| \\ &\leqslant C\int_0^{Q_0u}(Q_0u)^{1-\gamma}\,\mathrm{d}Q_0u \\ &\leqslant C(Q_0u)^{2-\gamma},\end{aligned}$$

其中 γ 可以取任何正数, 这里我们取 $\gamma < 1$. 所以当 $\tau \to -\infty$ 时, $\tilde{Q}_1u$ 中第二项不超过 $C(Q_0u)^{1-\gamma}$ 为指数趋于零. 这样, 就可以得到 (6.10) 中非齐次方程的通解:

$$Q_1u(\tau) = kQ_0u'(\tau) + \tilde{Q}_1u(\tau),$$

其中 k 是任意常数. 显然 $Q_1u(\mp\infty) = 0$.

为了满足条件

$$Q_1'u(0) = -\bar{u}_0'(t_0),$$

只要选取

$$k = -(\bar{u}_0'(t_0) + \tilde{Q}_1'u(0))F^{-1}(\beta_0, t_0, 0),$$

这里

$$\tilde{Q}_1'u(0) = -Y_2'(0)\int_{-\infty}^0 Y_1(s)F_1(s)\,\mathrm{d}s.$$

这样, 我们就找到了 (6.10) 的特解 $Q_1u(\tau)$. 当 $\tau \to -\infty$ 时, 它是指数衰减的函数.

类似的方法可以构造当 $0 \leqslant \tau < \infty$ 时方程 (6.10) 的解 $Q_1u(\tau)$, 它满足条件 (6.11). 需要指出 $Q_1u(\tau)$ 依赖于暂时还未知的 t_1, 它由下一步来确定.

函数 $Q_2u(\tau)$ 的构造类似于 $Q_1u(\tau)$. 根据可解性条件可得确定 t_1 的方程

$$F'(t_0)t_1 = k_1, \tag{6.15}$$

这里 k_1 是已知常数. 由 $[\mathrm{H}_{6.2}]$ 的条件 t_1 是惟一确定的. 这样最终我们就求得了 Q_1u, 而 Q_2u 含有暂时未知的 t_2 , 也要在下一步确定.

往下重复上述步骤. 每一个 $t_i(i \geqslant 2)$ 由下面方程确定

$$F'(t_0)t_i = k_i, \tag{6.16}$$

其中 k_i 是已知常数, 而 Q_iu 是形如 (6.10) 问题的解. 这样可以求出级数 (6.4) 所有的系数 t_i 和级数 (6.5) 所有的系数 Q_iu 至 n 阶.

边界级数项 Π_iu 和 $R_iu\,(i \geqslant 0)$ 由通常方法确定. 例如对 Π_0u 我们有下面问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Pi_0u}{\mathrm{d}\tau_0^2} = F(\alpha(0) + \Pi_0u, 0, 0), \quad \tau_0 \geqslant 0, \\ \Pi_0u(0) = -\alpha(0), \qquad \Pi_0u(\infty) = 0. \end{cases} \tag{6.17}$$

为了保证 (6.17) 解的存在性必须给出下面条件:

$[\mathrm{H}_{6.3}]$　假设 $\alpha(0) \leqslant 0 \leqslant \beta(0)$.

边界函数的指数衰减性质是显然的. 往下可以逐次确定 $\Pi_iu(i \geqslant 1)$. 如果满足下面条件同样可以求得 $R_iu(i \geqslant 0)$.

$[\mathrm{H}_{6.4}]$　假设 $\alpha(1) \leqslant 0 \leqslant \beta(1)$.

这样, 最终渐近展开式 (6.4), (6.5) 完全构造好了.

6.1.3　解的存在性和渐近解的余项估计

假设

$$A = t_0 + \mu t_1 + \cdots + \mu^{n-1}t_{n-1} + \mu^n(t_n - \delta),$$

其中 t_i 由方程 (6.14)—(6.16) 所确定, δ 是某个正常数. 对方程 (6.1) 我们引入左右辅助边值问题. 第一个左问题在区间 $0 \leqslant t \leqslant A$ 上具有边值条件

$$u(0) = 0, \quad u'(A) = 0. \tag{6.18}$$

第二个右问题在区间 $A \leqslant t \leqslant 1$ 上具有边值条件

$$u'(A) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{6.19}$$

对左右两个边值问题用边界层函数法可以构造渐近解和对足够小的 μ 证明解的存在性. 它们的渐近解 $u_A^{(-)}$ 和 $u_A^{(+)}$ 可表示成下面形式

$$u_A^{(-)}(t)=\sum_{i=0}^{n+1}\mu^i(\bar{u}_i(t)+\Pi_i u(\tau_0)+Q_i^{(-)}u(\tau_A))+O(\mu^{n+2}),$$

$$u_A^{(+)}(t)=\sum_{i=0}^{n+1}\mu^i(\bar{u}_i(t)+Q_i^{(+)}u(\tau_A)+R_i u(\tau_1))+O(\mu^{n+2}),$$

其中 $\tau_A=(t-A)/\mu$, $\bar{u}_i$, $\Pi_i u$, $R_i u$ 是 (6.5) 中的函数. 当 $\tau\leqslant 0$ 时, $Q_i^{(-)}u(\tau)=Q_i u(\tau)$; 当 $\tau\geqslant 0$ 时, $Q_i^{(+)}u(\tau)=Q_i u(\tau)(\ i=0,1,\cdots,n-1)$, $Q_n^{(\pm)}u$ 和 $Q_{n+1}^{(\pm)}u$ 略不同于 (6.5) 类似的项, 因为点 A 与 t_* 相差 $\mu^n\delta+O(\mu^{n+1})$.

根据 (6.18) 和 (6.19)

$$(u_A^{(+)})'-(u_A^{(-)})'|_{t=A}=0,$$

但是, 一般而言

$$\Delta u_A=u_A^{(+)}(A)-u_A^{(-)}(A)\neq 0.$$

为了得到光滑解, 我们可这样做, 使得 $\Delta u_A=0$. 对 Δu_A 有下面等式

$$\begin{aligned}\Delta u_A&=\sum_{i=0}^{n+1}\mu^i\left[Q_i^{(+)}u(0)-Q_i^{(-)}u(0)\right]+O(\mu^{n+2})\\&=\frac{2}{F(\beta_0,t_0,0)}[-G'(t_0)\delta+O(\mu)]\mu^{n+1},\end{aligned}\tag{6.20}$$

这里, 我们用到的 t_i 是方程 (6.15), (6.16) 的解.

随后我们用 $B=t_0+\mu t_1+\cdots+\mu^{n-1}t_{n-1}+\mu^n(t_n+\delta)$ 替换 A . 类似于 (6.20) 可得

$$\Delta u_B=u_B^{(+)}(B)-u_B^{(-)}(B)=\frac{2}{F(\beta_0,t_0,0)}[G'(t_0)\delta+O(\mu)]\mu^{n+1}.\tag{6.21}$$

关系式 (6.20) 和 (6.21) 表明, 对固定的 δ 和足够小的 μ, Δu_A 和 Δu_B 有不同的符号. 所以惟一存在 $t_*(A<t_*<B)$ 使得 $\Delta u(t_*)=0$, 也就是说, 具有 (6.18) 和 (6.19) 的边值问题的解在 $A=t_*$ 光滑的连接起来. 这样我们就求得了问题 (6.1), (6.2) 的解 $u(t,\mu)$. 显然有

$$t_*=t_0+\mu t_1+\cdots+\mu^{n-1}t_{n-1}+O(\mu^n).$$

这个关系式对任意的 n 都是正确的, 它是 t_* 的渐近展开式, 而级数 (6.5) 是问题 (6.1), (6.2) 解 $u(t,\mu)$ 的渐近展开式. 我们把上面所得到的结论写成下面定理.

定理 6.1 如果满足 $[H_{6.1}]$—$[H_{6.4}]$，那么对足够小的 μ, 在渐近展开式 (6.5) 主项的某邻域问题 (6.1), (6.2) 的解 $u(t,\mu)$ 存在惟一, 并且级数 (6.5) 在区间 $[0,1]$ 上是渐近级数, 即

$$\max_{[0,1]}|u(t,\mu)-U_n(t,\mu)|=O(\mu^{n+1}), \tag{6.22}$$

其中 $U_n(t,\mu)$ 是级数 (6.5) n 项部分和.

在实际操作时, 为了计算 $U_n(t,\mu)$ 需要把 $\tau=(t-t_*)/\mu$ 替换成 $\tau'=(t-(t_0+\mu t_1+\cdots+\mu^{n+1}t_{n+1}))/\mu$, 因为 t_* 的精确值是未知的. 这只改变了 U_n 的 $O(\mu^{n+1})$, 而估计式 (6.22) 保持不变.

6.2 具有“脉冲”形边界层的奇摄动解

6.2.1 边界层对边值的依赖性

我们仍讨论半线性边值问题 [14]

$$\begin{cases} \mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=F(u,t), \quad 0\leqslant t\leqslant 1, & (6.23)\\ u(0,\mu)=u^0, \quad u(1,\mu)=u^1. & (6.24)\end{cases}$$

条件 $[H_{6.1}]$ 在此仍成立. 根据边界层函数法 (6.23), (6.24) 的形式解为

$$u=\bar{u}(t,\mu)+\Pi u(\tau,\mu)+Qu(\tau_1,\mu), \tag{6.25}$$

这里 $\bar{u}$ 是正则级数, $\Pi u(\tau,\mu)$ 和 $Qu(\tau_1,\mu)$ 是在 $t=0$ 和 $t=1$ 处的边界层函数, 它们可写成

$$\bar{u}=\bar{u}_0(t)+\mu\bar{u}_1(t)+\cdots;$$
$$\Pi u=\Pi_0u(\tau)+\mu\Pi_1u(\tau)+\cdots;$$
$$Qu=Q_0u(\tau_1)+\mu Q_1(\tau_1)+\cdots.$$

正则级数构造比较简单

$$\bar{u}_0=\alpha(t), \quad \bar{u}_1\equiv 0, \quad \cdots, \quad \bar{u}_n=F^{-1}(\bar{u}_0,t)\bar{u}''_{n-2}+F_n, \tag{6.26}$$

其中 $F_n=F_n(\bar{u}_0(t),\cdots,\bar{u}_{n-1}(t),t)$ 是 t 的已知函数.

我们发现, 边界层级数 Πu 的构造依赖于初值 u^0, 必须分情况进行讨论. 而在 $t=1$ 处的情况是类似的.

a) 假设 $u^0=u_a^0<\gamma(0)$, 这时边界层函数 Π_0u 由下面问题确定

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Pi_0u}{\mathrm{d}\tau^2}=F(\alpha(0)+\Pi_0u,0),\\ \Pi_0u(0)=u^0-\alpha(0), \quad \Pi_0u(\infty)=0. \end{cases} \tag{6.27}$$

对 (6.27) 做变换 $\tilde{u}=\alpha(0)+\Pi_0 u$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau^2}=F(\tilde{u},0), \\ \tilde{u}(0)=u^0, \quad \tilde{u}(\infty)=\alpha(0). \end{cases} \tag{6.28}$$

这时产生两种情况. 初值 u^0 的不同可以确定两条不同轨线 I 和 II, 这时形式渐近解 (6.25) 也可以有两种情况: 一种取 $(\Pi_0 u)_I=(\tilde{u})_I-\alpha(0)$, 另一种取 $(\Pi_0 u)_{II}=(\tilde{u})_{II}-\alpha(0)$. 正因为如此, 渐近解 (6.25) 的高阶项在这两种情况下是不一样的. 写出求 $\Pi_1 u$ 的方程 (如果不写下标 I, II 说明对这两种情况方程是一样的)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Pi_1 u}{\mathrm{d}\tau^2}=F_u(\tilde{u},0)\Pi_1 u+h_1, \\ \Pi_1 u(0)=0, \quad \Pi_1 u(\infty)=0, \end{cases} \tag{6.29}$$

其中 $h_1=F_u(\tilde{u},0)\alpha'(0)+F_t(\tilde{u},0)\tau$. 这时对应的齐次方程只有零解. 这是因为 $\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{u}'$ 满足齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}'}{\mathrm{d}\tau^2}=F_u(\tilde{u},0)\tilde{u}'.$$

在情况 I 时, $\tilde{u}'(0)<0, \quad \tilde{u}'(\infty)=0$; 在情况 II 时, $\tilde{u}'(0)>0, \quad \tilde{u}'(\infty)=0$. 所以 $\Pi_1 u$ 由 (6.29) 惟一确定. 形式渐近解根据通常的方法都能构造, 由 (6.25) 所得到的级数是渐近级数.

b) 假设 $u^0=u_\delta^0>\gamma(0)$, 那么不存在当 $\tau\to\infty$ 时趋于 $\alpha(0)$ 的解, 即 (6.28) 无解, 也就是说 (6.23), (6.24) 没有 (6.25) 形式的解.

c) 假设 $u^0=\gamma(0)$. 这时情况会发生根本变化, 因为对应于 (6.29) 的齐次问题有非零解, 它就是 $\tilde{u}'$. 我们称这种情况为特别情况, 往下作详细讨论.

6.2.2 特殊边值

假设在 $t=0$ 处给边值

$$u^0=\gamma(0). \tag{6.30}$$

关系式 (6.26)—(6.29) 仍和原来一样. $\bar{u}_i, \Pi_0 u$ 的值和原来一样求. 至于 $\Pi_1 u$, 因为 $\tilde{u}'$ 是 (6.29) 对应齐次问题非零解, 所以非齐次问题有解必须满足可解性条件

$$\int_0^\infty (\tilde{F}_u\alpha'(0)+\tilde{F}_t\tau)\tilde{u}'\mathrm{d}\tau=0. \tag{6.31}$$

这里和往下记 $\tilde{F}_u=F_u(\tilde{u},0), \tilde{F}_t=F_t(\tilde{u},0)$, 对任意高阶项也记类似符号.

确定 $\Pi_2 u$ 的方程和定解条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Pi_2 u}{\mathrm{d}\tau^2}=\tilde{F}_u\Pi_2 u+h_2, \\ \Pi_2 u(0)=-\bar{u}_2(0), \quad \Pi_2 u(\infty)=0, \end{cases} \tag{6.32}$$

其中

$$h_2 = \frac{\tau^2}{2}\alpha''(0)\tilde{F}_u + \tilde{F}_u\bar{u}_2(0) + \frac{1}{2}\tilde{F}_{uu}[\tau^2(\alpha'(0))^2 + (\Pi_1 u)^2] + \tilde{F}_{ut}(\tau\alpha'(0) + \Pi_1 u)\tau + \frac{1}{2}\tilde{F}_{tt}\tau^2.$$

同样问题 (6.32) 有解的可解性条件

$$-F(\gamma(0),0)\bar{u}_2(0) = \int_0^\infty h_2\tilde{u}'\mathrm{d}\tau. \tag{6.33}$$

一般来说, (6.33) 不是 (6.31) 的推论. 这样, 在构造形式渐近解的过程中, 每一步都会产生一个新的可解性条件. 为了弄清楚这个问题, 先看下面例子.

例 6.1 讨论边值问题

$$\begin{cases}\mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -u(u+a(t)),\\ u(0,\mu) = u^0, \quad u(1,\mu) = u^1,\end{cases}$$

这里 $a(t) > 0$ 是某个可微函数.

这里等式 (6.31) 为

$$\int_0^\infty \{-a'(0)[a(0) - 2\Pi_0 u] - a'(0)[-a(0) + \Pi_0 u]\}\tilde{u}'\tau\mathrm{d}\tau = 0,$$

或者

$$a'(0)\int_0^\infty \Pi_0 u\tilde{u}'\tau\mathrm{d}\tau = a'(0)I = 0.$$

考虑到 $I \neq 0$. 所以 $a'(0) = 0$.

再看等式 (6.33). 先计算 $\gamma = \frac{a}{2}$, $F(\gamma,t) = -\frac{3}{4}a^2$, $\bar{u}_2 = -\frac{a''}{a}$, $a'(0) = 0$, 所以

$$a''(0)\left[\frac{3}{2}a(0) + \int_0^\infty \tau\frac{(\Pi_0 u)^2}{2}\mathrm{d}\tau\right] = -\int_0^\infty (\Pi_1 u)^2\tilde{u}'\,\mathrm{d}\tau.$$

我们发现 $a''(0)$ 的系数不等于零, 由此产生了对 $a(t)$ 的又一个条件. 这样在构造 (6.25) 形式渐近解时, 每一步对 $a(t)$ 都会产生新要求. 这说明当 $u^0 = \gamma(0)$ 时, 对 (6.23), (6.24) 无法构造 (6.25) 的渐近解. 为了解决这个矛盾, 我们在 $t = 0$ 这样给出边值条件

$$u^0 = \gamma(0) - k(\mu), \tag{6.34}$$

其中 $k(\mu)$ 是未知函数, 它可表示成下面形式

$$k(\mu) = k_1\mu + k_2\mu^2 + \cdots.$$

关系式 (6.26)—(6.28) 都正确, 但 (6.29) 改写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Pi_1 u}{\mathrm{d}\tau^2} = \tilde{F}_u \Pi_1 u + h_1, \\ \Pi_1 u(0) = k_1, \quad \Pi_1 u(\infty) = 0. \end{cases} \tag{6.35}$$

这时可解性条件可写成

$$\tilde{u}''(0)\Pi_1 u(0) = \int_0^\infty (\tilde{F}_u \alpha'(0) + \tilde{F}_t)\tilde{u}'\tau \,\mathrm{d}\tau,$$

或者

$$k_1 F(\gamma, 0) = \int_0^\infty (\tilde{F}_u \alpha'(0) + \tilde{F}_t)\tilde{u}'\tau \,\mathrm{d}\tau.$$

这就是确定 k_1 的方程

$$k_1 = F^{-1}(\gamma, 0) \int_0^\infty (\tilde{F}_u \alpha'(0) + \tilde{F}_t)\tilde{u}'\tau \,\mathrm{d}\tau. \tag{6.36}$$

求 k_2 要从确定 $\Pi_2 u$ 的方程着手. 方程 (6.32) 还是老样子, 但边值条件改为

$$\Pi_2 u(0) = -\bar{u}_2(0) + k_2.$$

从 (6.33) 可得

$$F(\gamma(0), 0)[k_2 - \bar{u}_2(0)] = \int_0^\infty h_2 \tilde{u}' \,\mathrm{d}\tau,$$

即得到求 k_2 的表达式

$$k_2 = F^{-1}(\gamma(0), 0) \int_0^\infty h_2 \tilde{u}' \,\mathrm{d}\tau + \bar{u}_2(0).$$

类似这样的做法可求出所有的 $k_i (i > 2)$.

对例 6.1 $k_1 = a'(0)/\sqrt{a(0)}$. 求出 k_1 后就可以构造 $\Pi_1 u$, 先作变换

$$\Pi_1 u = z + \frac{k_1}{\gamma(0) - \alpha(0)} \Pi_0 u.$$

这里 z 是下面问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\tau^2} = \tilde{F}_u z + h_1^*, \\ z(0) = 0, \quad z(\infty) = 0, \end{cases}$$

其中 $h_1^* = [h_1 + k_1(\tilde{F}_u \Pi_0 u - \tilde{F})]/(\gamma(0) - \alpha(0))$.

因为 k_1 满足可解性条件: $\displaystyle\int_0^\infty h_1^* \tilde{u}' \,\mathrm{d}\tau = 0$, 所以 z 可以表示成

$$z = \tilde{u}'(\tau) \int_0^\tau (\tilde{u}')^{-2} \mathrm{d}\eta \int_\infty^\eta \tilde{u}' h_1^* \mathrm{d}\xi.$$

由此求得

$$\Pi_1 u = \tilde{u}'(\tau)\int_0^{\tau}(\tilde{u}')^{-2}\,\mathrm{d}\eta\int_{\infty}^{\eta}\tilde{u}'h_1^*\,\mathrm{d}\xi + \frac{k_1}{\gamma(0)-\alpha(0)}\Pi_0 u. \tag{6.37}$$

这里 $\Pi_1 u$ 是不惟一的, 因为在 (6.37) 里加上 $C\tilde{u}'$ 仍是 (6.35) 的解, 其中 C 是任意常数. 我们发现在渐近解构造的每一步都会有这种情况, 所以形式渐近解 (6.25) 不惟一 (但在 $t=1$ 处不特别). 它表现在向 (6.25) 可添加 $(\mu C_1 + \mu C_2 + \cdots)\tilde{u}'$ 仍是渐近解, 其中 C_i 为任意常数.

定理 6.2 问题 (6.23), (6.24) 有下面形式的无穷多个渐近解, 其中

$$u^0 = \gamma(0) + k(\mu), \quad u' < \gamma(1),$$

而级数 $u(t,\mu) = \bar{u}(t,\mu) + \Pi u(\tau,\mu) + Qu(\tau_1,\mu) + (\mu C_1 + \mu C_2 + \cdots)\tilde{u}'$ 的部分和在满足方程 (6.23) 和边值 (6.34) 时具有误差 $O(\mu^{n+1})$, 但在 $t=1$ 处误差为指数小.

6.2.3 第二边值问题

在 (6.30) 中对 $t=0$ 也可给出第二边值

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0,\mu) = 0, \quad u(1,\mu) = u^1, \tag{6.38}$$

我们将用边界层函数法求形如 (6.25) 的渐近解. 这时关系式 (6.26)—(6.28) 保持原状, 但 (6.29) 改写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Pi_1 u}{\mathrm{d}\tau^2} = \tilde{F}_u\Pi_1 u + h_1, \\ (\Pi_1 u)'_{\tau=0} = -\alpha'(0), \quad \Pi_1 u(\infty) = 0. \end{cases} \tag{6.39}$$

可以看出非齐次问题 (6.39) 的谱和 (6.29) 没什么区别. 对求 $\Pi_2 u$ 的问题也一样. 所以 (6.23), (6.38) 满足边值问题的一切要求. 可以构造 (6.25) 的渐近解并有下面结论.

定理 6.3 在形式渐近解 (6.25) 主项邻域中问题 (6.23), (6.38) 有解 $u(t,\mu)$, 并且 (6.25) 是渐近级数.

附录 A　苏联奇摄动理论发展概况

数学大师陈省身曾指出 “了解历史的变化是了解这门科学的一个步骤”. 由于语言及其他原因, 从 20 世纪 60 年代中期至今, 苏联的数学一直披着神秘的面纱. 其实, 苏联是最早开展奇摄动研究的国家, 许多著名的俄国数学家 (包括 Tikhonov A.N., Volosov V.N., Mishchenko E.F., Oleinik O.A., Vasil′eva A.B., Lomov S.A., Ilyin A.M., Dmitriev M.G.) 曾开创了奇摄动研究的新方向, 至今对后人的研究产生着重要的影响. 为了使读者更好地从事奇摄动理论和方法的研究, 在此我们对它在苏联的发展概况做一个简单回顾.

关于奇摄动方程的研究奠基性工作 [2], [15]—[21] 是由 Tikhonov A.N. 院士开创的. 在他之前, 关于奇摄动理论只有一些零散文章 [15].

1. 奠基性工作 (Tikhonov A.N.)

在 Tikhonov 的第一篇文章 [2] 中, 他考虑了初值问题:

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=F(z,y,t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(z,y,t); & \text{(A.1)} \\ z(0,\mu)=z^0, \quad y(0,\mu)=y^0; & \text{(A.2)} \end{cases}$$

其中标量 z 和向量 y 是未知函数，$\mu>0$ 是正的小参数. 令 $\mu=0$, 得到退化方程. 因为退化方程的阶数小于原方程 (A.1) 的阶数, 所以退化解不满足条件 (A.2).

Tikhonov 研究了当 $\mu\to 0$ 时问题 (A.1), (A.2) 的解趋于退化解的极限过程. 如果方程 $F(z,y,t)=0$ 在区域 $D(y,t)$ 中有孤立根 $z=\varphi_i(y,t)(i=1,2,3)$, 其中一个根

$z = \varphi_1(y,t)$ $(\varphi_3 < \varphi_1 < \varphi_2)$ 是稳定的. 稳定性条件为

$$(z - \varphi_1)F(z,y,t) < 0. \tag{A.3}$$

从最简单的情况 $F = F(z,t)$ 看出: 当 $z < \varphi_1$ 时 F 是正的, 当 $z > \varphi_1$ 时 F 是负的. 还需要假设初始点 z^0 属于根 $z = \varphi_1(y,t)$ 的影响域: $\varphi_3 < z < \varphi_2$. 几何解释很清楚: 当 $t > 0, \mu \to 0$ 时积分曲线将趋向于 $z = \varphi_1$ 的曲线. 这样, 在一般情况有下面极限关系式:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\mu\to 0} z(t,\mu) = \bar{z}(t) = \varphi_1(\bar{y}(t),t), \quad 0 < t \leqslant T, & \text{(A.4)} \\ \lim\limits_{\mu\to 0} y(t,\mu) = \bar{y}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, & \text{(A.5)} \end{cases}$$

其中 $\bar{y}(t)$ 是下面方程的解

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t} = f(\varphi_1(\bar{y},t),\bar{y},t), \quad \bar{y}(0) = y^0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

请注意在 (A.5) 中含有 t 的极限过程是一致的, 而在 (A.4) 中它是不一致的, 因为 $z^0 \neq \varphi_1(y^0,0)$. 可以发现在 $t = 0$ 的区域, $z(t,\mu)$ 与 $\bar{z}(t)$ 有明显不同, 这个区域叫边界层. 在 [23] 中 Tikhonov 也考虑了 z 是向量函数的情况, 推广了条件 (A.3). (他的新条件对向量情况实际上是不够的), 同时他也研究了在导数前具有不同阶小参数的方程.

最后, 在 [24] 中提出了辅助方程的概念, 稳定根的一般定义和影响域. 辅助方程为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = F(z,y^*,t^*), \tag{A.6}$$

其中 $(y^*,t^*) \in D$ 是参数. 根 $z = \varphi_1(y,t)$ 稳定的是指方程 (A.6) 的奇点 $z = \varphi_1(y^*,t^*)$ 是在 Liapunov 意义下的渐近稳定. 根 $z = \varphi_1(y,t)$ 的影响域定义为: 当 $\tau \to \infty$ 时, 满足初始条件 $z|_{\tau=0} = z^*$ 方程 (A.6) 的解趋于 $\varphi_1(y^*,t^*)$ 的值.

在这时期 I.S.Gradstein 也研究了这个问题. 在他的第一批文章中考虑了线性方程和方程组情况. 在非线性情况时稳定性条件以 $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ 的形式给出, 这里 λ_i 是雅可比矩阵 $F_z(\varphi_1,y^*,t^*)$ 的特征值. 在他后来的文章中 Gradstein 得到了与 Tikhonov 同样的结论.

但 Tikhonov 有一个优势, 就是他有许多学生和一个学派. 他的学生继承和发展了他的方法. 在奇摄动理论方面, Tikhonov 的第一批追随者是他的学生 A.B.Vasil′eva 和 V.M.Volosov. Vasil′eva 在她的博士论文中也研究了问题 (A.1), (A.2) 并且构造了解的渐近展开式.

2. 平均化方法 (Volosov V.N.)

Volosov 研究了方程 $\mu^2 y'' = F(y,t)$. 考虑了 $F_y(\varphi,t) < 0$, (φ 是 $F(y,t) = 0$ 的一个根) 的情况, 即含有频率为 $1/\mu$ 的振荡. 发现 Tikhonov 理论在此不适用. 后来

Volosov 把他的结果与平均方法建立了对应关系.

3. 松弛振荡 (Mishchenko E.F.)

在应用方面, 特别是非线性振荡理论, 经常看到根 $z=\varphi_i$ 的分离不再成立, 即在有些点 t_0 稳定根 φ_1 与不稳定根 φ_3 相一致. 具体例子为

$$\mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=t-\left(z-\frac{1}{3}z^3\right)$$

当 $z_0=\dfrac{2}{3}$ 时, 在 t_0 附近我们观察到间断 (或跳跃) 现象, 即从 φ_1 的邻域到 φ_2 的邻域的快速转移. 虽然这种现象在 Tikhonov 的著作 [23] 中有提到, 但没有详细的讨论.

如果把独立变量 t 记作慢变量函数 y(导数前不带有小参数的函数). 可得自治系统

$$\mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=y-\left(z-\frac{1}{3}z^3\right),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1.$$

在 (y,z) 相平面上, 当 z 改变符号时, 除了 y 衰减外, 只要恰当地选择初值, 就能得到一个对应周期运动的闭轨, 这种振荡叫松弛振荡.

在 20 世纪 50 年代中期, L.S.Pontryagin, E.F.Mishchenko 和后者 (特别是 N.Kh. Rozov) 都出版了自己的著作. 他们研究了与自治系统松弛振荡有关的问题 [20].

4. 偏微分方程奇摄动 (Oleinik O.A.)

在这时期莫斯科国立大学出现了第一批奇摄动偏微分方程文章. 其中的一部分是 O.A.Oleinik 完成的. 1957 年 Vishik 和 Lyusteinik 的著作出版, 书中介绍了各种线性奇摄动方程. 他们不仅研究了 $\mu\to 0$ 的极限过程, 而且构造了解的渐近展开. 这种渐近展开包含了 μ 的正则幂级数和补偿只有正则展开时被丢失边界条件的边界层函数. 在这些文章发表之后边界层函数法相继出炉. 而在这之前, 它只用在流体动力学中. 这也就是奇摄动理论在其相关理论发展的第一阶段没有被使用在科学文献中的重要原因之一.

在此我们简单解释一下 Vishik–Lyusternik 方法: 假设在光滑边界 $\partial\Omega$ 的区域 Ω 上给出简单的椭圆方程:

$$\mu^2\Delta u-k^2(x,y)u=f(x,y,\mu),\quad u|_{\partial\Omega}=u^0. \tag{A.7}$$

寻找以下形式的渐近解:

$$u=\bar{u}+\Pi u, \tag{A.8}$$

其中 $\bar{u} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu^k \bar{u}_k(x,y)$ 是正则级数, 它的系数由下面方程确定:

$$-k^2(x,y)\bar{u}_0 = f_0(x,y), \quad -k^2(x,y)\bar{u}_1 = f_1(x,y),$$
$$\Delta\bar{u}_{k-2} - k^2(x,y)\bar{u}_k = f_k(x,y), \quad k \geqslant 2$$

(f_k 是 f 关于 μ 幂级数的第 k 项).

显然, 正则级数不满足边界条件, 因此必须用边界层级数来校正, 使得 $\bar{u}+\Pi u$ 满足边界条件. 为此我们引入两个新的独立变量: ℓ 作为沿着 $\partial\Omega$ 的长度参数, 这样边界函数可以写成 $x=\varphi(\ell), y=\psi(\ell)$; τ 是从任一点 $M\in\Omega$ 到边界 $\partial\Omega$ 的距离. 在边界层附近引入一个伸缩变换 $\rho = \dfrac{\tau}{\mu}$, 这样, 边界层级数可表示成 $\Pi u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu^k \Pi_k u(\rho,\ell)$, 其中 $\Pi_k u(\rho,\ell)$ 由微分方程所定, 而 ℓ 是参数. 特别,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}\Pi_0 u - k^2(\ell)\Pi_0 u = 0, \quad \Pi_0 u|_{\rho=0} = -\bar{u}_0(\ell) + u^0(\ell).$$

(边界条件在 $\rho=0$ 要求 $(\bar{u}+\Pi u)|_{\partial\Omega} = u^0$ 这里 $k^2(\ell) \equiv k^2(\varphi(\ell),\psi(\ell)), \bar{u}_0(\ell) = \bar{u}_0(\varphi(\ell),\psi(\ell))$) . 当 $\rho\to\infty$ 时, 边界函数是指数衰减的:

$$|\Pi_k u| < C\mathrm{e}^{-\kappa\rho},$$

其中 κ 和 C 是常数.

虽然 ρ 从 0 到无穷变化, 但只在 $\partial\Omega$ 附近起作用. 所以在引进新尺度时 $\rho<\delta$. 在 Vishik–Lyusternik 方法中要求 $\Pi_k u$ 是无穷光滑的, 为此, 当 $\rho < \dfrac{\delta}{3}$ 时 $\Pi_k u = 1$, 当 $\rho > \dfrac{2}{3}\delta$ 时 $\Pi_k u = 0$. 我们取 U_n 为 $\bar{u}+\Pi u$ 的部分和, 它包含了所有项直到 $O(\mu^n)$ 量阶, 并满足:

$$\sup_{\Omega}|u(x,y,\mu) - U_n| = O(\mu_{n+1}).$$

Vishik–Lyusternik 方法可以推广到更复杂的椭圆方程、抛物线方程和双曲方程. 文章 [25] 讨论了能用这种方法所解决的不同问题.

上世纪 70 年代中期, Butuzov 引入了对应于角层的角层函数. 设 Ω 是一个有非光滑边界的矩形区域, 我们构造如下形式的渐近解

$$u = \bar{u} + \Pi^{(0)}u + \Pi^{(a)}u + Q^{(0)}u + Q^{(b)}u + R^{(0,0)}u + R^{(a,0)}u + R^{(0,b)}u + R^{(a,b)}u, \quad (\text{A.9})$$

其中 $\bar{u}$ 表示正则级数, 其后的四项是边界级数. 在靠近各自的边界 $x=0, x=a, y=0, y=b$ 它们可以用 Vishik–Lyustenik 方法构造. 它们的项分别依赖于 $\xi_0 = x/\mu$, $\xi_a = (x-a)/\mu$, $\eta_0 = y/\mu$, $\eta_b = (x-b)/\mu$, 可以用常微分方程来定义, 称为常边界层函数.

尽管 $\bar{u}+\Pi^{(0)}u$ 能满足边界条件 $x=0$, 但是在端点 $y=0$ 和 $y=b$ 处出现了新的偏差. 为弥补这些偏差, 我们在矩形的每个角附近引入角层级数. (A.9) 式中带有

双上标的 R 项表示四个这样的角层级数. 例如对应于 $(0,0)$ 的角层级数 $R^{(0,0)}u$, 它仅依赖于 ξ_0 和 η_0, 而 $R_0^{(0,0)}u$ 满足以下的微分方程和边界条件:

$$\begin{cases} \Delta R_0^{(0,0)}u - k^2(0,0)R_0^{(0,0)}u = 0, \quad \xi_0 > 0, \eta_0 > 0, \\ R_0^{(0,0)}(0,\eta_0) = -Q_0^{(0)}(0,\eta_0), \quad R_0^{(0,0)}(\xi_0,0) = -\Pi_0^{(0)}(\xi_0,0). \end{cases}$$

Butuzov 和他的合作者也把这种方法推广到其他类型的微分方程和临界情形的问题 [7].

在此还必须提及 Butuzov 和他的同事们对光滑化过程的研究. 有时会出现这样的情况, 即所给问题的解是存在的, 但无法构造完整的渐近展开式, 因为在第 $k+1$ 步, 必须求出渐近展开式的第 k 项的导数, 但这通常是不可能的 (例如边界值和角点不一致的时候). 此时我们可以构造逼近解, 其余项的阶数是 $o(\mu)$ 或 $o(\mu^2)$. 然后通过一个特殊的光滑函数来增加光滑性, 使求导成为可能. 由于光滑性的增加余项的阶数也增大了 [7].

5. 常微分方程奇摄动 (Vasil′eva A.B.)

与此同时 Vasil′eva 研究了非线性常微分方程奇摄动问题. 她的第一批关于渐近展开的文章出现在 20 世纪 50 年代末, 主要是研究了在高阶导数前带有小参数的方程, 也涉及问题 (A.1), (A.2). 如果满足 Tikhonov 定理条件, 同样可得 (A.4), (A.5) 的极限关系式. 其中要求

$$\mathrm{Re}\lambda_i < 0. \tag{A.10}$$

而 λ_i 是雅可比矩阵 $F_z(\varphi_1, y, t)$ 的特征值.

她建立了沿用至今的边界层函数法, 目的在于构造问题解 $z(t,\mu)$, $y(t,\mu)$ 的渐近展开式. 我们记向量 $u=(z,y)^{\mathrm{T}}$, 那么在 (A.8) 中

$$\bar{u}(t,\mu) = \bar{u}_0(t) + \mu\bar{u}_1(t) + \cdots. \tag{A.11}$$

和

$$\Pi u(\tau,\mu) = \Pi_0 u(\tau) + \mu\Pi_1 u(\tau) + \cdots, \quad \tau = \frac{t}{\mu}, \tag{A.12}$$

为了求得 $\bar{u}_k$ 和 $\Pi_k u$, 我们把方程 (A.1) 写成下面形式:

$$\mu\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Pi z = F(\bar{u}(\tau\mu,\mu) + \Pi u, \tau\mu) - F(\bar{u}(\tau\mu,\mu),\tau\mu) + F(\bar{u}(t,\mu),t), \tag{A.13}$$

$$\mu\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Pi y = \mu f(\bar{u}(\tau\mu,\mu) + \Pi u, \tau\mu) - \mu f(\bar{u}(\tau\mu,\mu),\tau\mu) + \mu f(\bar{u}(t,\mu),t). \tag{A.14}$$

把 (A.11), (A.12) 代入 (A.13), (A.14) 和 (A.2), 先按尺度 t, τ 分离方程, 然后比较 μ 的同次幂, 可得确定系数的方程和定解条件. 这个过程在 [1] 中有详细介绍. 特别, $\bar{u}_0$ 与 (A.4), (A.5) 的极限函数相一致: $\Pi_0 y \equiv 0, \Pi_0 z$ 满足:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Pi_0 z = F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, y^0, 0), \quad \Pi_0 z|_{\tau=0} = z^0 - \bar{z}_0(0).$$

由于雅可比矩阵 $F_z(\varphi, y, t)$ 的特征值实部都为负, 所以当 $\tau \to \infty$ 时边界函数是指数衰减的, 并且有下面估计式:

$$\sup_{[0,T]} |u(t,\mu) - U_n| = O(\mu^{n+1}). \tag{A.15}$$

该估计式表明 (A.8) 是问题 (A.1), (A.2) 解的惟一渐近展开.

用这种算法也可以研究边值问题, Vasil'eva 和 V.A.Tupchiev 讨论了条件稳定情况:

$$\mathrm{Re}\lambda_i < 0 (i = 1, \cdots, k), \quad \mathrm{Re}\lambda_i > 0 (i = k+1, \cdots, M), \tag{A.16}$$

其中向量 z 是 M 维的. 我们必须规定下面的边界条件: 在 $t = 0$ 处给出 z 的 k 个分量, 而在 $t = 1$ 处给出 z 的 $M - k$ 个分量:

$$z_i(0) = z_i^0 (i = 1, \cdots, k), \quad z_i(1) = z_i^0 (i = k+1, \cdots, M), \quad y(0) = y^0. \tag{A.17}$$

问题 (A.1), (A.17) 的渐近解有下面形式:

$$u = \bar{u}(t,\mu) + Q^{(0)}u(\tau_0, \mu) + Q^{(1)}u(\tau_1, \mu), \quad \tau_0 = \frac{t}{\mu}, \quad \tau_1 = \frac{t-1}{\mu},$$

其中 $\bar{u}$ 是正则级数, $Q^{(0)}u$ 是左边界层级数, $Q^{(1)}u$ 是在 $t = 1$ 附近的右边界层级数. 为了得到更有效的级数, 类似于对 (A.13) 的做法. 对于 $Q_0^{(0)}z$ 得到与 $\Pi_0 z$ 相同的方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0} Q_0^{(0)} z = F(\bar{z}_0(0) + Q_0^{(0)} z, y^0, 0). \tag{A.18}$$

在 $\tau_0 = 0$ 我们只有 k 个条件:

$$(Q_0^{(0)} z)_i|_{\tau_0 = 0} = z_i^0 - (\bar{z}_0(0))_i. \tag{A.19}$$

显然, $Q_0^{(0)} z = 0$ 是方程 (A.18) 的鞍点. 因此存在经过该鞍点的 M-k 维稳定流形 $S^{(0)}$. 条件 (A.19) 是充分的, 只要初始点位于 $S^{(0)}$ 上, 由于 (A.16), 当 $\tau_0 \to \infty$ 时, 就能得到指数趋向于零的惟一解 $Q^0 z$. 这个方法也被用于比 (A.17) 更复杂和更一般的边值条件 $R(u(0,\mu), u(1,\mu)) = 0$.

6. 带有小延滞的微分方程 (Vasil'eva A.B.)

上世纪 60 年代初, 发现了一种新的奇摄动方程, 称为带有小延滞的微分方程. 下面讨论一个最简单的, 但能体现此类方程特征的问题:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(\dot{z}(t-\mu), z(t), z(t-\mu), t), \\ z(t) = z^0(t), \quad \dot{z}(t) = \dot{z}^0(t) \quad (-\mu \leqslant t \leqslant 0). \end{cases}$$

当 $\mu = 0$ 时得到常微分方程, 其解可通过在一个点的辅助条件 $z(0) = z^0(0)$ 来确定, 这样, 在 $\mu = 0$ 处我们会 "丢失" 在区间 $[-\mu, 0)$ 上给出的补充条件, 因此应该有边界层. 在这种情况下, 也能用边界层函数法来求渐近解. 其中稳定性条件用 $|\lambda_i|_i < 1$ 来代替. 则正则级数项可以用常微分方程来表示, 而边界层级数项可以用差分方程来表示. 最初的结果是 Vasil'eva 在 1962 年得出的, 此后, V.I.Rozhkov 对其作了推广 [1].

7. 临界情况奇摄动 (Vasil'eva A.B.)

很多实际问题都可归结为奇摄动理论中的所谓临界情形来处理, 即退化方程有多个解的情形. 关于各种临界情形的理论可参阅文献 [6].

8. 内部层问题 (Vasil'eva A.B.)

在奇异摄动理论中, 关于非线性问题的研究开始于 [2]. 后来, 随着边界函数法的出现, 摄动理论和它的应用得到了很大的发展 [1, 7]. 近年来, 大量的工作是研究奇摄动问题中的内部层现象, 这类解我们习惯称之为空间对照结构. 在空间对照结构中具有阶梯结构的解和脉冲结构的解是有很大区别的. 以下面问题为例介绍一下空间对照结构的概念:

$$\mu^2 \Delta u = f(u, t, \mu), \quad t \in D \subset \mathfrak{R}^2, \tag{A.20}$$

$$u \,|_{\partial D} = g(t), \tag{A.21}$$

其中 μ 是小参数, Δ 是 Laplace 算子. 如果在区域 D 的某一条曲线 l 的附近, 当从退化问题

$$f(\bar{u}, t, 0) = 0 \tag{A.22}$$

的一个解 φ_1 快速转移到另一个解 φ_2, 则问题 (A.20), (A.21) 的解称为具有阶梯状的解.

问题 (A.20), (A.21) 的解称为具有脉冲状的解, 它的特性在于: 除了在退化方程 (A.22) 解 $\bar{u} = \varphi(t)$ 的 t 的某个很小邻域外, 精确解和退化解非常接近. 而在这很小邻域内, 差异很大. 类似地, 空间对照结构的概念可以出现在奇异摄动的其他问题中. 在空间对照结构中, 解的渐近展开式是以边界函数法为基础的.

8.1 常微分方程中具有阶梯状的空间对照结构

首先介绍一种比较 “粗糙” 的阶梯状空间对照结构 [1]

$$\begin{cases} \mu^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = F(z,t), \quad 0 < t < 1, \\ z(0,\mu) = 0, \quad z(1,\mu) = 0. \end{cases} \tag{A.23}$$

可以把 (A.23) 化成相应的方程组:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = F(z_2,t), \quad \mu \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = z_1, \quad 0 < t < 1, \\ z_2(0,\mu) = 0, \quad z_2(1,\mu) = 0. \end{cases} \tag{A.24}$$

先讨论 (A.24) 中最简单的情况: $F = F(z_2)$.

令 $t = \mu\tau$, (A.24) 为

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\tau} = F(z_2), \quad \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\tau} = z_1. \tag{A.25}$$

假设满足下列条件: 退化方程 $F(z_2) = 0$ 有三个根 $z_2 = \varphi_i (i = 1,2,3)$, 并且

a) $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$;

b) $F'(\varphi_i) > 0 (i = 1,3), \quad F'(\varphi_2) < 0$.

在相平面 (z_2, z_1) 上方程组 (A.25) 的平衡点 $A_1(\varphi_1, 0)$ 和 $A_3(\varphi_3, 0)$ 是鞍点.

方程组 (A.25) 有首次积分

$${z_1}^2 = 2\int_{\varphi_2}^{z_2} F(z)\mathrm{d}z + C = 2\Phi(z_2) + C, \tag{A.26}$$

其中 C 是常数. 对 (A.26) 开根式可得

$$z_1 = \pm[2\Phi(z_2) + C]^{\frac{1}{2}}.$$

这样, 可以把相轨线族分为下列三种情况:

a) $\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(z)\mathrm{d}z > \int_{\varphi_3}^{\varphi_2} F(z)\mathrm{d}z$;

b) $\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(z)\mathrm{d}z < \int_{\varphi_3}^{\varphi_2} F(z)\mathrm{d}z$;

c) $\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(z)\mathrm{d}z = \int_{\varphi_3}^{\varphi_2} F(z)\mathrm{d}z (\Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_3))$.

情况 c) 可以写成

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_3} F(z)\mathrm{d}z = 0.$$

这时鞍点 A_1 和 A_3 由两条异宿轨道连接而成, 它们构成了一个胞腔. 现在回到方程 (A.24), 并做下列假设:

条件 1 假设函数 $F(z_2,t)$ 在某个区域 G 中无限次可微.

条件 2 假设方程 $F(z_2,t)=0$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 中有三个根 $z_2=\varphi_i(t)(i=1,2,3)$, 并且

a) $\varphi_1(t)<\varphi_2(t)<\varphi_3(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1;$

b) $F_{z_2}(\varphi_i(t),t)>0(i=1,3),\quad F_{z_2}(\varphi_2(t),t)<0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$

注释 A.1 方程 $F(z_2,t)=0$ 还可以有其他的根, 但在构造渐近解时用到的仅仅是上面三个根.

引进新函数

$$I(t)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_3}F(z,t)\mathrm{d}z.$$

假设存在某个数 $t_0\in(0,1)$ 满足方程

$$I(t)=0. \tag{A.27}$$

这是在相平面上构成胞腔的条件. 由此可知方程 (2.1) 除了在端点有边界层外, 还在区间的内部存在转移层, 这种解称为具有阶梯状空间对照结构的解.

注释 A.2 方程 (A.27) 可以有几个根, 即可以存在几个转移层. 本文只讨论一个转移层的情况.

除了满足**条件 1**, **条件 2** 外, 还需要满足下列条件:

条件 3 假设方程 (A.27) 有解 t_0, $0<t_0<1$.

条件 4 假设

$$I'(t_0)=\int_{\varphi_1(t_0)}^{\varphi_3(t_0)}F_t(z,t_0)\,\mathrm{d}z\neq 0.$$

条件 4 意味着方程 (A.27) 只有单根 t_0, 所以我们说解的阶梯状结构是 "粗糙" 的. 往下只讨论从 $\varphi_1(t)$ 跳跃到 $\varphi_3(t)$ 的转移解. 转移点 $t^*(\mu)$ 事先是未知的. 为了构造解的渐近展开式, 将引进两个辅助边值问题 (边值问题 I 和边值问题 II), 它们对应的解分别用 $(-)$ 和 $(+)$ 来记.

边值问题 Ⅰ $(0\leqslant t\leqslant t^*)$:

$$\begin{cases}\mu\dfrac{\mathrm{d}z_1^{(-)}}{\mathrm{d}t}=F(z_2^{(-)},t),\quad \mu\dfrac{\mathrm{d}z_2^{(-)}}{\mathrm{d}t}=z_1^{(-)},\\ z_2^{(-)}(0,\mu)=0,\quad z_2^{(-)}(t^*,\mu)=\varphi_2(t^*).\end{cases}$$

边值问题 Ⅱ $(t^*\leqslant t\leqslant 1)$:

$$\begin{cases}\mu\dfrac{\mathrm{d}z_1^{(+)}}{\mathrm{d}t}=F(z_2^{(+)},t),\quad \mu\dfrac{\mathrm{d}z_2^{(+)}}{\mathrm{d}t}=z_1^{(+)},\\ z_2^{(+)}(t^*,\mu)=\varphi_2(t^*),\quad z_2^{(+)}(1,\mu)=0.\end{cases}$$

首先构造边值问题 Ⅰ 在两个端点 $t=0$, $t=t^*$ 有边界层的解, 而在边界层外, 当 $\mu \to 0$ 时解的分量趋向于 $\varphi_1(t)$. 同样对边值问题 Ⅱ 构造在两个端点 $t=t^*$, $t=1$ 有边界层的解. 在边界层外, 当 $\mu \to 0$ 时, 解的分量趋向于 $\varphi_3(t)$. 随后我们把这两个解在 t^* 处光滑地连接起来, 即

$$z_1^{(-)}(t^*,\mu) = z_1^{(+)}(t^*,\mu). \tag{A.28}$$

这样就保证了 (A.24) 阶梯状解的存在性. 等式 (A.28) 就是确定转移点 $t^*=t^*(\mu)$ 的方程. 为了构造边值问题 Ⅰ, Ⅱ 的形式渐近解并使得他们在 t^* 处连接起来, 必须把 $t^*(\mu)$ 展开成下面的幂级数:

$$t^*(\mu) = t_0 + \mu t_1 + \cdots . \tag{A.29}$$

根据边界层函数法, 边值问题 Ⅰ 的解可表示成形式级数

$$z_i^{(-)}(t,\mu) = \bar{z}_i^{(-)}(t,\mu) + \Pi z_i(\tau_0,\mu) + Q z_i^{(-)}(\tau,\mu)(i=1,2), \tag{A.30}$$

其中

$$\bar{z}_i^{(-)}(t,\mu) = \bar{z}_{i0}^{(-)}(t) + \mu \bar{z}_{i1}^{(-)}(t) + \cdots \tag{A.31}$$

是正则项级数;

$$\Pi z_i(\tau_0,\mu) = \Pi z_{i0}(\tau_0) + \mu \Pi z_{i1}(\tau_0) + \cdots, \quad \tau_0 = \frac{t}{\mu} \tag{A.32}$$

是在 $t=0$ 附近的边界层级数;

$$Q z_i^{(-)}(\tau,\mu) = Q_0 z_i^{(-)}(\tau) + \mu Q_1 z_i^{(-)}(\tau) + \cdots, \quad \tau = \frac{t-t^*}{\mu} \tag{A.33}$$

是在 $t=t^*$ 附近的边界层级数. 类似地, 边值问题 Ⅱ 的解可表示成

$$z_i^{(+)}(t,\mu) = \bar{z}_i^{(+)}(t,\mu) + Q z_i^{(+)}(\tau,\mu) + R z_i(\tau_1,\mu)(i=1,2), \quad \tau_1 = \frac{t-1}{\mu}, \tag{A.34}$$

其中各项是类似于 (A.31), (A.32) 和 (A.33) 的级数.

这些级数中的各项系数都可由相应的方程来确定. 当 $\mu \to 0$ 时, 方程 (A.23) 的解有下面的极限式

$$\lim_{\mu\to 0} z(t,\mu) = \begin{cases} \varphi_1(t), & 0<t<t_0, \\ \varphi_3(t), & t_0<t<1. \end{cases} \tag{A.35}$$

这就意味着存在阶梯状空间对照结构解.

注释 A.3 类似地可以构造从 $\varphi_3(t)$ 跳跃到 $\varphi_1(t)$ 的阶梯状的解.

注释 A.4 如果在 (A.23) 中给出的是第二类的边值条件:

$$z'(0,\mu)=z'(1,\mu)=0,$$

那么在渐近表达式 (A.30), (A.34) 中不出现边界函数 $\Pi_0 z_i$ 和 $R_0 z_i$.

对方程 (A.23) 同样可以讨论临界情况下阶梯状空间对照结构, 即: 关系式 (A.27) 对所有的 t 恒等于零. 例如,

$$F(z,t)=z(z^2-a^2(t)).$$

在临界情况下, t_0 已经不能由 (A.27) 来确定, 而要有比较复杂的方程来求得, 这就需要用到更高阶的渐近展开式.

对临界情况讨论比 (A.23) 更一般的方程并具有第二类边值条件

$$\begin{cases} \mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}=F(z,t,\mu), \quad 0<t<1, \\ z'(0,\mu)=z'(1,\mu)=0. \end{cases} \tag{A.36}$$

同样要求方程 (A.36) 右端满足**条件 1** 和**条件 2**. 特别要求退化方程 $F(z,t,0)=0$ 有三个根 $z=\psi_i(t)(i=1,2,3)$. 并且 $\psi_1(t)<\psi_2(t)<\psi_3(t)$, 在 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_3(t)$ 之间除了 $\psi_2(t)$ 没有其他的根. 同时

$$F_z(\psi_i(t),t,0)>0(i=1,3), \quad F_z(\psi_2(t),t,0)<0, \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

为讨论方便起见, 可以取 $\psi_2(t)\equiv 0$.

在临界情况下我们把**条件 3** 改成

条件 3′ 假设 $I(t)\equiv 0, \quad 0\leqslant t\leqslant 1$.

这时 t_0 由下面方程确定

$$G(t_0)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}(\tilde{F}_t(\tau)\tau+\tilde{F}_\mu(\tau))\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau=0. \tag{A.37}$$

条件 4′ 假设 (A.37) 有解 t_0, $0<t_0<1$.

为了证明解的存在性和求它的高阶渐近展开式, 还需要一个条件:

条件 5 假设 $G'(t_0)<0$.

无论是对临界情况, 还是对非临界情况在构造渐近解的过程中 (A.29) 中 $t_i(i=1,2,\cdots)$ 由下面线性方程确定:

$$I'(t_0)t_i=C_i \qquad (G'(t_0)t_i=C_i),$$

其中 C_i 是已知常数. 由**条件 4**, t_i 可惟一确定.

把上面讨论的两种情况写成下面基本结果.

记 $Z_n^{(-)}(t,\mu)$ 和 $Z_n^{(+)}(t,\mu)$ 是渐近级数 $z^{(-)}$ 和 $z^{(+)}$ 的 n 阶部分和, 把 τ 换成 $\left(t-\sum\limits_{i=0}^{n+1}\mu^i t_i\right)/\mu$, 并引进记号

$$Z_n(t,\mu)=\begin{cases}Z_n^{(-)}(t,\mu), & 0\leqslant t\leqslant\sum\limits_{i=0}^{n+1}\mu^i t_i,\\ Z_n^{(+)}(t,\mu), & \sum\limits_{i=0}^{n+1}\mu^i t_i<t\leqslant 1.\end{cases}$$

定理 A.1　如果满足**条件 1—条件 5**, 那么对足够小的 μ, 问题 (A.23), (A.36) 的解 $z(t,\mu)$ 存在, 且有下面的估计:

$$|\, z(t,\mu)-Z_n(t,\mu)\,|<C\mu^{n+1},\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

其中常数 $C>0$ 不依赖于 μ.

定理 A.2　如果满足**条件 1—条件 5**, 那么对足够小的 μ, 问题 (A.23), (A.36) 的解 $z(t,\mu)$ 存在, 并且有下面极限关系式

$$\lim_{\mu\to 0}z(t,\mu)=\begin{cases}\varphi_1(t), & 0<t<t_0,\\ \varphi_3(t), & t_0<t<1.\end{cases}$$

8.2　常微分方程中其他类型阶梯状空间对照结构

1) 把 (A.23) 得到的结果推广到具有快慢变量的方程组 [38]

$$\begin{cases}\mu^2\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}=F(z,y), \quad \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=G(z,y), & \text{(A.38)}\\ z(0,\mu)=z(1,\mu)=y(0,\mu)=y(1,\mu)=0. & \text{(A.39)}\end{cases}$$

解的极限式为:

$$\lim_{\mu\to 0}z(t,\mu)=\begin{cases}\varphi_1(\bar{y}_0(t)), & 0<t<t_0,\\ \varphi_3(\bar{y}_0(t)), & t_0<t<1,\end{cases}\tag{A.40}$$

其中 $\varphi_1(y)$ 和 $\varphi_3(y)$ 是方程 $F(z,y)=0$ 两个不同的根, 而 $\bar{y}_0(t)$ 可这样确定, 先从方程

$$\int_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_3(y_0)}F(z,y_0)\mathrm{d}z=0$$

求出 y_0, 再由下面两个问题求出 $\bar{y}_0^{(\pm)}(t)$,

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{y}_0^{(-)}}{\mathrm{d}t^2}=G(\varphi_1(\bar{y}_0^{(-)}),\bar{y}_0^{(-)}),\\ \bar{y}_0^{(-)}(0)=0,\quad \bar{y}_0^{(-)}(t_0)=y_0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{y}_0^{(+)}}{\mathrm{d}t^2}=G(\varphi_3(\bar{y}_0^{(+)}),\bar{y}_0^{(+)}),\\ \bar{y}_0^{(+)}(t_0)=y_0,\quad \bar{y}_0^{(+)}(1)=0,\end{cases}$$

随后要求 $\bar{y}_0^{(-)}(t), \bar{y}_0^{(+)}(t)$ 在点 t_0 光滑连接, 即

$$(\bar{y}_0^{(-)})'(t_0) = (\bar{y}_0^{(+)})'(t_0).$$

这也是确定 t_0 的方程. 所以 (A.40) 中的所有的量都可确定.

2) 含有一阶导数的二阶方程 [9]

$$\mu^2 \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = F\left(\mu \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} z, t\right),$$

其中 $\varphi_i(t)(i=1,2,3)$ 类似于第一节中求法得到. 相平面上的平衡点 $\varphi_i(t)(i=1,3)$ 是鞍点, 而 $(\varphi_2(t),0)$ 可以是中心, 也可以是焦点. 连接两个鞍点异宿轨道的存在性一般来说不是显然的, 但可以出现. 例如

$$F = \mu\alpha(t)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + (z-\alpha(t))(z-\beta(t))(z-\gamma(t)).$$

这时出现的两条异宿轨道形成胞腔, 但一般来说胞腔关于 z 轴不对称.

如果连接两鞍点的异宿轨道可以找到, 那么渐近解的构造没有大的变化 [39]. 如果在 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 前不含有 μ, 那么已讨论过下面方程:

$$\begin{cases} \mu^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = A(z,t)\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + B(z,t), \\ z(0,\mu) = z^0, \quad z(1,\mu) = z^1. \end{cases}$$

这时解的极限关系式是

$$\lim_{\mu\to 0} z(t,\mu) = \begin{cases} \bar{z}_0^{(-)}(t), & 0 < t < t_0, \\ \bar{z}_0^{(+)}(t), & t_0 < t < 1, \end{cases}$$

其中 $\bar{z}_0^{(-)}$, $\bar{z}_0^{(+)}$ 是下面两个问题的解 (在 $[0,1]$ 上这两个解的图像是不相交的)

$$A(\bar{z}_0^{(-)},t)(\bar{z}_0^{(-)})' + B(\bar{z}_0^{(-)},t) = 0, \quad \bar{z}_0^{(-)}(0) = z^0,$$

$$A(\bar{z}_0^{(+)},t)(\bar{z}_0^{(+)})' + B(\bar{z}_0^{(+)},t) = 0, \quad \bar{z}_0^{(+)}(1) = z^1,$$

其中 t_0 由下面方程确定

$$\int_{\bar{z}_0^{(-)}(t_0)}^{\bar{z}_0^{(+)}(t_0)} A(z,t)\mathrm{d}z = 0.$$

3) 两个方程的方程组 [10]

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = F_1(z_1,z_2,t), \\ \mu \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = F_2(z_1,z_2,t). \end{cases} \tag{A.41}$$

这是方程组 (A.24) 的推广. 这个方程组也可能出现阶梯状空间对照结构. 转移点 t_0 (主项) 同样是由相平面上连接两个鞍点的异宿轨道的存在性所确定的, 但是这里两个鞍点不一定都在 z 轴上.

如果方程组 (A.41) 是哈密顿系统 (假设中 t 是常数), 即

$$F_2\mathrm{d}z_1 - F_1\mathrm{d}z_2 = \mathrm{d}H(z_1, z_2, t),$$

那么 t_0 可以由下面的方程来确定

$$H(\varphi_1(t), \psi_1(t), t) - H(\varphi_3(t), \psi_3(t), t) = 0.$$

4) 还有一系列情况 (对比较简单的情况) 可以产生阶梯状空间对照结构

a) 如果 (A.41) 的右边不含 t, 而在相平面上存在胞腔, 那么转移点 t_0 可以由下面式子确定

$$t_0 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_1},$$

其中 λ_1 和 λ_3 是矩阵 $\dfrac{\partial F_i}{\partial z_k}$ 在鞍点 (φ_1, ψ_1) 和 (φ_3, ψ_3) 的正特征值, 这时 φ_i 和 ψ_i 是常数. 方程组可以出现两个或两个以上转移点的空间对照结构. 这是早期空间对照结构的结果 [1].

b) 具有 "快变量" 和 "比较快变量" 方程组的阶梯状空间对照结构 [42]

$$\begin{cases} \mu^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F(y, z, t), \\ \mu^4 \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = G(y, z, t). \end{cases}$$

c) 对研究而言, 比较困难的情况是两个两阶方程组有 "相同速度" 的变量 [12]

$$\begin{cases} \mu^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F(y, z, t), \\ \mu^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = G(y, z, t). \end{cases}$$

d) 阶梯状空间对照结构不仅在边值问题出现, 也可以在初值问题出现. 但是对初值问题而言这种现象的出现是以破坏退化方程有孤立根为前提的 [46].

8.3　常微分方程中脉冲状空间对照结构

对问题 (A.23) 同样可以讨论脉冲状空间对照结构解. 在这种情况下, 除了在边界点和某个内部点的很小邻域以外, 精确解非常接近于退化方程的一个根. 这种空间对照结构是由退化方程的两个根而不是三个根形成.

条件 6 假设方程 $F(z,t) = 0$ 有两个根 $z = \varphi_i(t) (i = 1, 2)$, 并且 $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$,

$$F_z(\varphi_1(t), t) > 0, \quad F_z(\varphi_2(t), t) < 0.$$

条件 7 存在某个函数 $\psi(t)$ 有

$$\int_{\varphi_1(t)}^{\psi(t)} F(z,t)\mathrm{d}z = 0,$$

并且在 $\varphi_1(t) < z < \psi(t)$ 中 $F(z,t)=0$ 只有一个根. 这时在相平面 (z,z') 上, 对固定的 t 不出现胞腔, 而出现绳锁套. 用研究阶梯状空间对照结构的方法同样可以讨论脉冲状空间对照结构. 只是跳跃点 t^* 不是 z 和 φ_2 的交点, 而是 z 的极值点 [13], 即

$$z'(t^*,\mu) = 0.$$

确定 t^* 主项 t_0 的方程为

$$H(t) \equiv \int_{\psi(t)}^{\varphi_1(t)} F_t(z,t) \int_{\psi(t)}^{z} \left[2\int_{\varphi_1(t)}^{s} F(p,t)\,\mathrm{d}p\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}s\mathrm{d}z = 0. \tag{A.42}$$

条件 8 假设方程 (A.42) 在 $t=t_0\in(0,1)$ 中有解, 并且 $H'(t_0)\neq 0$.

对足够小的 μ, **条件 6—条件 8** 保证脉冲状空间对照结构的存在性. 在这里我们不具体介绍怎样构造问题 (A.23) 的具有脉冲状结构的渐近解, 仅指出公式 (A.42) 是边值问题 Ⅰ 和 Ⅱ 在构造一阶渐近解时得到的, 并且同 "粗胞腔" 的形成紧密相连. 代替 (A.41), 在出现脉冲状解时, 有下面解的极限式:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\mu\to 0} z(t,\mu) = \varphi_1(t), \quad \forall t\in(0,1), \quad t\neq t_0, \\ \lim\limits_{\mu\to 0} z(t_0+\mu t_1,\mu) = \psi(t_0), \end{cases}$$

其中 t_1 是 t^* 的一次近似项. 还需要指出, 对比较复杂的情况也可以产生脉冲解. 问题 (A.38), (A.39) 可以存在具有脉冲结构的解 [48, 82]. 在这种情况下, 渐近解构造的方法是同第二节中所描述的方法类似的. 这时求 $\bar{y}_0$ 是比较简单的, 只有一个方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{y}_0}{\mathrm{d}t^2} = G(\varphi_1(\bar{y}_0),\bar{y}_0), \quad \bar{y}_0(0)=\bar{y}_0(1)=0. \tag{A.43}$$

函数 $\bar{y}_0(t)$ 在点 t_0 的值 y_0 和 t_0 由下面方程确定

$$H(y_0)\bar{y}_0'(t_0) = 0. \tag{A.44}$$

其中

$$H(y) = \int_{\psi(y)}^{\varphi_1(y)} F_y(z,y) \int_{\psi(y)}^{z} \left[2\int_{\varphi_1(y)}^{s} F(p,y)\mathrm{d}p\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}s\mathrm{d}z.$$

对方程 (A.44) 进行讨论

a) 如果方程 $H(y)=0$ 有解 $y=y_0$, 并且 $H'(y_0)\neq 0$, 那么 t_0 由方程 $\bar{y}_0(t_0)=y_0$ 确定, 此时假设 $\bar{y}_0'(t_0)\neq 0$.

$b)$ 如果 $H(y_0) \neq 0$ 那么 t_0 由方程 $\bar{y}_0'(t_0) = 0$ 确定, 也就是说, 利用方程 (A.44) 给出的第二种可能性可以构造其他类型的脉冲状空间对照结构. 这时假设对 $\bar{y}_0''(t_0) \neq 0$, 对 $z(t,\mu)$ 下面的关系式是正确的

$$\begin{cases} \lim\limits_{\mu\to 0} z(t,\mu) = \varphi_1(\bar{y}_0(t)), \quad \forall t \in (0,1), \quad t \neq t_0, \\ \lim\limits_{\mu\to 0} z(t_0 + \mu t_1, \mu) = \psi(\bar{y}_0(t_0)). \end{cases}$$

如果对方程组 (A.38) 给出第二类边值条件

$$z'(0,\mu) = z'(1,\mu) = y'(0,\mu) = y'(1,\mu) = 0,$$

那么既可能出现阶梯状空间对照结构, 也可能出现脉冲状空间对照结构. 对第二类边值条件, 方程 (A.43) 在边值条件

$$\bar{y}_0'(0) = \bar{y}_0'(1) = 0$$

下的解为 $\bar{y}_0(t) \equiv y_0 = const$. 这时空间对照结构可以具有任意个脉冲, 且在任意相邻的脉冲之间有相同的距离.

最后需要指出, 往往可能出现几个内部转移点的解, 其中在一些点上出现脉冲状结构的解, 而在另外一些点上是阶梯状结构的解. 这是因为退化方程是非线性的, 所以既有满足方程 (A.42) 的解, 又有满足方程 (A.27) 的解. 也有可能出现在一个转移层上既有脉冲状结构又有阶梯状结构的解. 这种情况发生在形如 (A.41) 的方程组里 [10].

8.4　偏微分方程中的空间对照结构

首先讨论椭圆方程中阶梯状空间对照结构的解. 所给的方程为

$$\mu^2 \Delta u = f(u,x,\mu), \quad x = (x_1,x_2) \in D \subset \mathfrak{R}^2. \tag{A.45}$$

并具有下面边值条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,\mu) = 0, \quad x \in \partial D. \tag{A.46}$$

其中 $\mu > 0$ 是小参数, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ 是 Laplace 算子, D 是具有足够光滑边界的有界区域, 函数 $f(u,x,\mu)$ 足够光滑, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 是内部法向量.

可以证明在确定的条件下, 问题 (A.45), (A.46) 具有阶梯状的解. 这个解之所以被称为具有阶梯状的空间对照结构的解, 是因为在 D 内的某曲线 l 附近它从退化方程 $f(u,x,0) = 0$ 的一个根跳跃到另一个根. 同样, 转移点 x^* 事先是未知的, 它要在构造渐近解的过程中才能确定.

对抛物型方程同样讨论过具有阶梯状的空间对照结构解 [51, 52].

对问题 (A.45), (A.46) 也讨论过具有脉冲状空间对照结构. 在 [53] 中讨论过脉冲解发生在非闭曲线的某个邻域中, 而在 [55] 中的解则研究了在闭曲线的某个邻域中, 同时在 [54] 中讨论了在周期曲线附近产生脉冲状的空间对照结构解.

对数量型抛物方程在 [56] 中构造了具有脉冲状空间对照结构的渐近解, 它是时间的周期函数.

同样, 也讨论过具有两个抛物型方程组成的方程组, 在每个方程的导数前, 小参数 μ 的幂是不一样的, 在这种情况下可以产生解的一个分量具有脉冲状, 或者两个分量都有脉冲状.

9. 奇摄动方程的正则化方法 (Lomov S.A.)

这一时期, 在国立莫斯科大学的数学力学系对奇摄动方程的研究也在进行. Vishik, S.A.Lomov 研究小组提出了所谓的正则化的方法. 那时 Lomov 在莫斯科能量研究所工作, 后来他和他的同事大力发展了这一方法 (其中有 V.F.Safonov 和 A.G.Eliseev). 该方法的基本理论参见文献 [18], 我们简要给出它的主要观点. 其实在 Birkhoff 的著作 [15] 中已包含了这种方法的来源.

考虑如下问题:

$$\mu u' - A(x)u = h(x), \quad u(0,\mu) = u^0, \tag{A.47}$$

这里我们假定 $(n \times n)$ 矩阵 A 的特征值都是单根: $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$, $i \neq j$. 除了自变量 x 之外我们还引入一个独立的新 (即正则的) 变量:

$$t_i = \frac{1}{\mu}\int_0^x \lambda_i(\tau)\mathrm{d}\tau = \varphi_i(x,\mu).$$

同时考虑函数 $\tilde{u}(x,t,\mu)$, 它满足 $\tilde{u}|_{t=\varphi} = u(x,\mu)$. 我们把 $\tilde{u}$ 代入 (A.47), 得到一个关于正则参数 μ 的偏微分方程 (而不是常微分方程). 我们希望找到以下形式的 $\tilde{u}$:

$$\tilde{u} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \tilde{u}_i(x,t), \tag{A.48}$$

这里的 $\tilde{u}_i$ 可以从确定方程中得到, 如:

$$\lambda_1 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial t_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial t_n} - A(x)\tilde{u}_0 = h(x), \quad \tilde{u}_0(0,0) = u_0.$$

为了确定 $\tilde{u}$, Lomov 引入了一类函数, 称为非共振的解空间. 在该解空间中关于 $\tilde{u}_i$ 的问题是惟一可解的. 这个空间的元素有如下形式:

$$u(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}(x) l_i(x) \mathrm{e}^{t_j} + \sum_{i=1}^{n} u_i(x) l_i(x),$$

其中 $l_i(x)$ 是对应于 λ_i 的特征向量, 而 $u_i(x)$ 和 $u_{ij}(x) \in C_\infty[0,a]$ 是数量函数. 如果满足条件 $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, 只要把 $t_i = \varphi_t$ 代入 (A.48), 就能得到 (A.47) 解的一个渐近展开式. 其中最有意义的结果之一如下: 如果给 $u_i(x, \varphi(x))$ 的导数添加一些条件, 则 (A.48) 的渐近级数一致趋向于 $u(x,\mu)$, $x \in [0,a]$.

这种方法在若干边值问题, 非线性问题, 抛物线方程和其他的偏微分方程中都得到了发展, 详细介绍请参看 [18].

10. 奇摄动方程的匹配方法 (Ilyin A.M.)

匹配方法最初被 Vishik 和 Lyusternik 用于解决一些拟线性问题, 后来由 A.M.Ilyin 和他的研究小组 (在 URAL 科学中心) 进行了系统的研究. 其实运用匹配的思想很早就有了, 最早是为了处理物理学中的转向点问题.

考虑如下问题:

$$\mu^3 u'' - q(t)u = f(t), \quad u(0,\mu) = u(1,\mu) = 0, \tag{A.49}$$

其中 $q(0) = 0$, $q'(0) = 1$, 而且在 $(0,1]$ 上, $q(t) > 0$. 由于 $q(0) = 0$, 所以不能用边界函数法. 正则部分展开式如下

$$\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} u_{3k}(t), \tag{A.50}$$

其中

$$u_{3k}(t) = t^{-3k-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj} t^j. \tag{A.51}$$

在 $t = 0$ 的邻域令 $t = \mu\xi$, 并记 $v(\xi,\mu) = u(\mu\xi,\mu)$, 这时方程 (A.49) 可写成

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2} - q(\mu\xi)v = f(\mu\xi).$$

构造 v 的渐近展开式如下:

$$v = \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k v_k(\xi). \tag{A.52}$$

于是该和式的项满足 Airy 方程:

$$v_k'' - \xi v_k = f^{(k)}, \quad v_k(0) = 0.$$

其解如下

$$v_k = Y_2(\xi) \int_0^{\xi} Y_1(s) f^{(k)}(s)\,\mathrm{d}s + Y_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} Y_2(s) f^{(k)}(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 Y_1, Y_2 是著名的 Airy 函数且 $Y_1(0)=0$, 当 $\xi\to\infty$ 时, Y_1 是指数增大而 Y_2 是指数减小. 因此, 当 ξ 足够大时, v_k 的渐近展开式为

$$v_k(\xi)=\xi^k\sum_{j=0}^{\infty}h_{k,j}\xi^{-3j}, \tag{A.53}$$

其中 h_{kj} 是已知的.

我们必须保证有这样的定义域存在: 即当 x 较小而 ξ 较大时, (A.50) 和 (A.52) 这两个展开式都有意义. 然后设 $\bar{u}=v$, 代入展开式 (A.51), 替换其中的 u_{3k}, 再代入展开式 (A.52), 替换其中的 v_k. 在等式两边用相同的变量 (如 ξ), 并比较等式两边关于 ξ 的同次幂的系数, 最后可得如下等式:

$$h_{k,j}=c_{j,k+1}. \tag{A.54}$$

所以使较小的 t 和较大的 ξ 都存在的公共定义域 $[\mu^\alpha,\mu^\beta]$ $(0<\beta<\alpha<1)$ 非常重要, 只有这样 (A.54) 式才有意义. 并且可用 (A.50) 和 (A.52) 这两个级数构造出复合渐近展开式.

进一步考虑下面方程

$$\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(t,u),\quad u(0,\mu)=u^0,$$

其中在 (0,0) 的邻域内 $f\sim t-u^2$. 如果用上面方法 $\bar{u}$ 和 v 无法匹配. 因此必须再引进新变量 $\eta=\mu^{-\frac{2}{3}}t$ 和 $\omega=\mu^{-\frac{1}{3}}u$, 使 η 较小时的 ω 展开式必须要等于 ξ 较大时的 v 展开式, 同时 η 较大时 ω 展开式必须要等于 t 较小时的 $\bar{u}$ 展开式.

运用匹配的方法, Ilyin 和他的合作者不仅研究了许多类似于如上所述的单一问题, 而且还研究了其他更复杂的问题. 该方法还被推广到偏微分方程中, 例如, 对一个在边界处有切线的椭圆型微分方程退化成一阶偏微分方程, 该方法在这样的椭圆型微分方程中已得到了成功应用. 它同样应用于三维空间中多连通区域的椭圆问题, 描述振动波的拟线性椭圆型方程及其他问题 [17].

11. 奇摄动数值方法

在计算机技术和数值方法方面, 我们发现数值方法的许多研究都与奇摄动问题有关, 下面将介绍两种类型的方法: 迭代法和有限差分法.

在关系式 (A.15) 中, $O(\mu^{n+1})$ 表示在满足不等式 $|O(\mu^{n+1})|<C\mu^{n+1}$ 条件下的误差项, 常数 c 不依赖于 μ 但一般依赖于 n, 因此通过增大 n 可以减小对应于 μ 的剩余项, 但对于固定的 μ, 增大 C(和 n) 可得到一个较大的剩余项. Yu Boglaev(在莫斯科高温物理研究所) 运用边界函数法并选择特殊初始逼近, 再用一个正常的迭代程序, 得到一个介于第 n 次迭代和满足估计量 $C\mu^{n+1}$ 的精确解之间的差分, 其中的 C 不依赖于 n.

有限差分法既可用于解决在边界及内部区域使非均匀网点变得更高精度 (N.S. Bakhvalov), 也可用于解决均匀网点问题 (Ilyin 及其合作者), 其中差分算子的构造要考虑到渐近性, 后一方法的目的是为了得到与 μ 有关的一致收敛的估计值.

最近, Voronezsh 小组 (V.V.Strygin 及合作者) 的研究成果已经问世, 其中包括了奇摄动的射影方法.

12. 变分问题中的空间对照结构

从上世纪 90 年代初开始, 作者倪明康和莫斯科国立大学 A.B.Vasil'eva 教授, 莫斯科人大 M.G.Dmitriev 教授合作, 开创了空间对照结构研究的新方向, 即变分问题中的空间对照结构. 并已得到了一些初步的结果 [75, 83]. 这里要做的问题很多, 发展空间也很大.

我们讨论了下面的变分问题

$$\begin{cases} J_\mu(u_\mu) = \displaystyle\int_0^T [a(x_\mu, t) + b^{\mathrm{T}}(x_\mu, t)u_\mu + \frac{1}{2}\mu^2 u_\mu^{\mathrm{T}} u_\mu]\mathrm{d}t \to \min_{u_\mu}, & \text{(A.55)} \\ x'_\mu(t) = u_\mu(t), & \text{(A.56)} \\ x_\mu(0,\mu) = 0, \quad x_\mu(T,\mu) = 0, \quad 0 < \mu \ll 1, & \text{(A.57)} \end{cases}$$

其中 $x_\mu(t) \in \mathfrak{R}^n, u_\mu(t) \in \mathfrak{R}^n, b(x_\mu, t) \in \mathfrak{R}^n, a(x_\mu, t) \in \mathfrak{R}$.

利用直接展开法 [77] 和广义法则 [78] 证明了具有脉冲结构解的存在性, 并构造了渐近解. 脉冲点 t_* 可展开成 μ 的幂级数

$$t_* = t_0 + \mu t_1 + \mu^2 t_2 + \cdots + \mu^k t_k + \cdots.$$

条件 A. 假设 $\bar{J}^* = \inf\limits_{\bar{u}} \bar{J} > -\infty$, 其中

$$\bar{J} = \int_0^T \left(a(\bar{x}, t) + b^{\mathrm{T}}(\bar{x}, t)\bar{u}\right) \mathrm{d}t \to \min_{\bar{u}}.$$

条件 A_1. 假设函数 $P(x,t)$ 在 $x = \alpha(t)$ 有局部极大值, 并且存在函数 $x = \gamma(t)$ 使得 $P(\gamma(t), t) = P(\alpha(t), t)$ 和 $P_x(\gamma(t), t) \neq 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T$, 不妨设 $\alpha_i(t) < \gamma_i(t) (i = 1, \cdots, n)$, 其中

$$P(x,t) = -a(x,t) + \varphi_t(x,t), \quad \varphi_x(x,t) = b(x,t).$$

条件 A_2 在相空间上存在从平衡点 $(\alpha(t), t)$ 出发的同宿轨道.

条件 A_3 方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_1 J^*(\gamma(t) - \alpha(t)) \mid_{t=t_0} = 0$ 有惟一解 t_0, 并且 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} Q_1 J^*(\gamma(t) - \alpha(t)) \mid_{t=t_0} > 0$.

条件 A_4 初值 $\Pi_0 x(0) = -\alpha(0), R_0 x(0) = -\gamma(T)$ 在讨论问题解的影响域内.

定理 A.3 在满足条件 A_1—A_4 之下, 问题 (A.55)—(A.57) 存在具有脉冲结构的解. 对足够小的 $\mu > 0$, 有下面余项估计:

$$\| x_\mu^* - X_n \| \leqslant C\mu^{n+1}, \quad \| u_\mu^* - U_n \| \leqslant C\mu^{n+1},$$

$$\| J_\mu^* - J_n(U_n) \| \leqslant C\mu^{2n+2}.$$

在下列条件下问题 (A.55)—(A.57) 也可以出现阶梯结构解.

条件 B_1. 假设存在向量函数 $\alpha(t) \in X, \gamma(t) \in X$ 使得 $P(\alpha(t),t) = P(\gamma(t),t) = \max\limits_x P(x(t),t)$, 不妨设 $\alpha(t), \gamma(t)$ 是相邻的极大值.

条件 B_2. 在相空间上存在从平衡点 $(\alpha(t),t)$ 出发回到平衡点 $(\gamma(t),t)$ 的异宿轨道.

条件 B_3. 假设方程组 $\dfrac{\partial M}{\partial t}(t_0,k_0) = 0, \dfrac{\partial M}{\partial k}(t_0,k_0) = 0$ 有解 (t_0,k_0), 并且 $\dfrac{\partial M^2}{\partial t^2}(t_0,k_0)$ 是正定矩阵.

条件 B_4. 初值 $\Pi_0 x(0) = -\alpha(0), \quad R_0 x(0) = -\gamma(T)$ 在讨论问题解的影响域内.

定理 A.4 如果满足条件 A, B_1—B_4, 那么问题 (A.55)—(A.57) 存在具有阶梯结构的解, 对充分小的 $\mu > 0$, 有下面余项估计

$$\| x_\mu^* - X_n \| \leqslant C\mu^{n+1}, \quad \| u_\mu^* - U_n \| \leqslant C\mu^{n+1},$$

$$\| J_\mu^* - J_n(U_n) \| \leqslant C\mu^{2n+2}.$$

13. 控制论中奇摄动 (Dmitriev M.G.)

最优控制理论中的奇摄动问题比微分方程的奇摄动初边值问题更为复杂, 当控制函数 u 无约束的条件下, M.G.Dmitriev 已构造出了最优控制问题的渐近展开式. 得到了相位变量, 控制函数和目标函数的渐近展开式 [81]. 对 u 有约束的问题 (即使最简单的情况) 也比 u 无约束的问题研究得要少得多. 其中特别有意义的是 A.J.Kalinin(Minsk) 的研究成果 (包括在 $|u| \leqslant 1$ 的条件下, 转移点的渐近展开和奇摄动的边界点), Odessa 研究小组 (V.A.Plotnikov 及合作者) 也用包括平均和微分的方法研究了最优控制问题.

14. 奇摄动理论及方法的应用

在物理学, 工程学, 化学和生物学中已出现了奇摄动问题的各种模型, 其中一些问题在 [7] 中作了讨论. 研究奇摄动问题的流形积分法及其应用, 特别是陀螺系统在文献 [21] 中有介绍.

下面着重指出与工程学的一个实际分支有关的问题, 即半导体设备理论. 其中 Vasil'eva 的莫斯科研究组 (M.P.Belyanin 及其成员), Voronezsh 研究小组 (V.V.Strygin 及成员) 以及 Leningrad 和 Riga 的研究小组都致力于这些问题的研究.

Belyanin 的成果值得特别关注. 他们的研究包括利用微分方程来描述半导体设备的不同模型

$$
\begin{cases}
\mu^2\Delta\varphi = -p + n + N, \\
J_n = \dfrac{\partial n}{\partial t} + R, \\
J_n = -\mu_n n \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad} n, \\
\operatorname{div} J_p = -\dfrac{\partial p}{\partial t} - R, \\
J_p = -\mu_p p \operatorname{grad}\varphi - \operatorname{grad} p.
\end{cases} \tag{A.58}
$$

这里的 μ 是 Debye 长度和设备规模特性的比率. 该系统有一个附加条件 (这里不作介绍). Belyanin 详细分析了二极管一维模型的稳定性和在不同情况下更复杂的设备, 以及是否重组并有大量离子产生. 他也研究了晶体管二维空间模型的稳定性和部分一维空间中的非稳定模型. 利用边界函数法及其修正模型可以构造当 $\mu \to 0$ 时的渐近解.

附录 B 恰帕雷金定理

恰帕雷金定理以及由此引出的各条定理是证明微分方程解存在并估计解的重要工具, 它和 Nagumo 定理都属于微分不等式方法.

对初值问题

$$Ly = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - f(y,t) = 0, \quad y(0) = y^0,$$

假设它的解在 $[0, H]$ 上有定义.

如果存在可微函数 $\beta(t)$ 和 $\alpha(t)$, 它们满足下面不等式:

1. $\alpha(t) < \beta(t)$;
2. $L\beta(t) > 0,\ L\alpha(t) < 0,\ t \in (0, H)$;
3. $\alpha(t) < y^0 < \beta(t)$, 则函数 $\beta(t)$ 和 $\alpha(t)$ 常常称为上下解.

定理 B.1 (恰帕雷金定理) 假设 $\beta(t)$, $\alpha(t)$ 是上面初值问题的上下解, 则在区间 $[0, H]$ 上有下面不等式

$$\alpha(t) < y(t) < \beta(t). \tag{B.1}$$

证明 只对下解 $\alpha(t)$ 进行证明, 对 $\beta(t)$ 的证明是类似的. 因为 $\alpha(0) < y^0$, 所以在点 $t = 0$ 的右邻域有 $\alpha(t) < y(t)$. 由此产生两种可能

a) 在整个区间 $[0, H]$ 上保持不等式 (B.1), 则定理被证明.

b) 存在某个点 $t_1 > 0$, 有 $y(t_1) = \alpha(t_1)$.

如果 *b*) 成立, 则 $\alpha'(t_1) > y'(t_1)$, 但这是不可能的. 这是因为

$$\alpha'(t_1) < f(\alpha(t_1), t_1),$$

由此推出,

$$y'(t_1) = f(y(t_1), t_1) = f(\alpha(t_1), t_1) > \alpha'(t_1).$$

所以 b) 不成立. □

定理 B.2　假设函数 $z(t)$ 在 $[t_0, H]$ 上连续, 导数按段连续, 并且满足下面不等式

$$\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant N|z| + a, \quad |z(t_0)| \leqslant b, \tag{B.2}$$

其中 N, a 和 b 是常数, 在导数间断点不等式 (B.2) 应理解为左右极限式, 那么有不等式

$$|z(t)| \leqslant s(t), \quad t \in [t_0, H],$$

其中 $s(t)$ 是下面初值问题的解

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = Ns + a, \quad s(t_0) = b$$

附录 C　Nagumo 定理

考虑下面问题 [79]

$$\begin{cases} L\,y\ \ = y\,'' - F(y,t) = 0, \\ y(0) = y^0, \quad y(1) = y^1, \end{cases} \tag{C.1}$$

其中 $F(y,t)$ 在 $\bar{D} = \{0 \leqslant t \leqslant 1,\ |y| \leqslant B\}$ 上有定义, 连续并关于 y 的导数也连续, $\max(|y^0|, |y^1|) \leqslant B$, B 为常数.

定理 C.1 (Nagumo 定理)　假设存在两个函数 $\beta(t)$, $\alpha(t)$, 它们被称为 (C.1) 的上解和下解. 如果它们满足下面条件

a) $\alpha(t) \leqslant \beta(t), \quad t \in [0,1]$;

b) $L\,\beta \leqslant 0, \quad L\,\alpha \geqslant 0,\ t \in [0,1]$;

c) $\alpha(0) \leqslant y^0, \quad \alpha(1) \leqslant y^1, \quad \beta(0) \geqslant y^0, \quad \beta(1) \geqslant y^1$,

那么存在 (C.1) 的解 $y(t)$, 并有下面不等式

$$\alpha(t) \leqslant y(t) \leqslant \beta(t). \tag{C.2}$$

作为引理我们先证明定理 C.1 在比较强的条件下成立. 看下面问题

$$\begin{cases} L\tilde{y} = \tilde{y}\,'' - \tilde{F}(\tilde{y},t) = 0, \\ \tilde{y}(0) = y^0, \quad \tilde{y}(1) = y^1 \end{cases} \tag{C.3}$$

对 (C.3) 我们做下面假设:

[H₁]　假设在 $\tilde{D} = \{0 \leqslant t \leqslant 1,\ |\tilde{y}| < \infty\}$ 上 $\tilde{F}$ 连续并有界, 即 $|\tilde{F}| < M$.

[H₂]　假设 $\tilde{F}$ 关于 $\tilde{y}$ 按段光滑, 即 $\tilde{F}$ 除了有限个点外关于 $\tilde{y}$ 有导数, 在这有限个点上导数不存在, 但是左右导数存在. $\tilde{F}_{\tilde{y}}$ 被理解成或者 $\tilde{F}$ 在该点关于 $\tilde{y}$ 的导数存在, 或者在该点关于 $\tilde{y}$ 的导数不存在, 但左右导数存在.

[H$_3$]　假设 $\tilde{F}_{\tilde{y}}$ 有界, 即当 $|\tilde{y}|<\infty$ 时, $|\tilde{F}_{\tilde{y}}|<L$, L 是某个常数.

引理 C.1　如果满足条件 [H$_1$]—[H$_3$], 则问题 (C.1) 有解 $\tilde{y}(t)$

为了证明该引理, 把 (C.3) 写成等价方程组

$$\begin{cases} \tilde{y}\,' = \tilde{z}, \\ \tilde{z}\,' = \tilde{F}(\tilde{y}, t). \end{cases} \tag{C.4}$$

对 (C.4) 给出下面初值

$$\tilde{y}(0) = y^0, \quad \tilde{z}(0) = r, \tag{C.5}$$

其中 r 为参数, $|r| \leqslant \Gamma =$ 常数.

应用 Picard 逐次逼近法把 (C.4), (C.5) 化成积分方程

$$\tilde{y}(t) = y^0 + \int_0^t \tilde{z}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\tilde{z}(t) = r + \int_0^t \tilde{F}(\tilde{y}, s)\mathrm{d}s. \tag{C.6}$$

由下面递推公式得到数列 $\{\tilde{y}_n\}$, $\{\tilde{z}_n\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n(t) &= y^0 + \int_0^t \tilde{z}_{n-1}(s)\mathrm{d}s, \\ \tilde{z}_n(t) &= r + \int_0^t \tilde{F}(\tilde{y}_{n-1}, s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{C.7}$$

取 $\tilde{y}_0 = y^0$, $\tilde{z}_0 = r$, 可得

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(t) &= y^0 + \int_0^t \tilde{z}_0(s)\mathrm{d}s, \\ \tilde{z}_1(t) &= r + \int_0^t \tilde{F}(\tilde{y}_0, s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} |\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_0(t)| &\leqslant rt, \\ |\tilde{z}_1(t) - \tilde{z}_0(t)| &\leqslant Mt. \end{aligned}$$

往下证 $\{\tilde{y}_n\}$, $\{\tilde{z}_n\}$ 关于 r, t 在 $t\in[0,1]$, $|r|<\Gamma$ 上是一致收敛的. 为此 $\tilde{y}_n$ 和 $\tilde{z}_n$ 可看作是下面级数的部分和

$$\begin{aligned} &\tilde{y}_0(t) + [\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_0(t)] + \cdots + [\tilde{y}_n(t) - \tilde{y}_{n-1}(t)] + \cdots, \\ &\tilde{z}_0(t) + [\tilde{z}_1(t) - \tilde{z}_0(t)] + \cdots + [\tilde{z}_n(t) - \tilde{z}_{n-1}(t)] + \cdots. \end{aligned} \tag{C.8}$$

只要证明 (C.8) 关于 r 和 t 一致收敛即可. 从 (C.7) 可得

$$\begin{aligned}\tilde{y}_n(t)-\tilde{y}_{n-1}(t)&=\int_0^t(\tilde{z}_{n-1}(s)-\tilde{z}_{n-2}(s))\mathrm{d}s,\\ \tilde{z}_n(t)-\tilde{z}_{n-1}(t)&=\int_0^t[\tilde{F}(\tilde{y}_{n-1}(s),s)-\tilde{F}(\tilde{y}_{n-2}(s),s)]\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{C.9}$$

因为 $\tilde{F}$ 按段光滑, 所以满足 Lipschitz 条件

$$|\tilde{F}(y_1,t)-\tilde{F}(y_2,t)|\leqslant L\,|y_1-y_2|$$

其中 L 是 Lipschitz 常数.

回到 (C.9) 可得

$$\begin{aligned}|\ \tilde{y}_2\ -\ \tilde{y}_1\ |\ &\leqslant\int_0^t|\tilde{z}_1-\tilde{z}_0|\mathrm{d}s\leqslant M\cdot\frac{t^2}{2},\\ |\ \tilde{z}_2\ -\ \tilde{z}_1\ |\ &\leqslant\int_0^t L\,|\tilde{y}_1-\tilde{y}_0|\mathrm{d}s=L\int_0^t rs\mathrm{d}s<L\Gamma\cdot\frac{t^2}{2},\\ \cdots\quad&\quad\cdots\\ |\tilde{y}_n-\tilde{y}_{n-1}|&\leqslant M\cdot\frac{t^n}{n!},\\ |\tilde{z}_n-\tilde{z}_{n-1}|&\leqslant\Gamma\cdot\frac{L^{n-1}t^n}{n!}.\end{aligned}$$

由此可见对 (C.8) 有二个优级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n!}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Gamma\cdot\frac{L^{n-1}}{n!}$ 所以 $\{\tilde{y}_n\}$ $\{\tilde{z}_n\}$ 关于 t 和 r 一致收敛于 $\tilde{y}(t,r)$, $\tilde{z}(t,r)$. 这两个函数在 $t\in[0,1]$, $|r|\leqslant\Gamma$ 上一致有界 $|\tilde{y}(t,r)|\leqslant K$, $|\tilde{z}(t,r)|\leqslant N$. 这样就证明了 (C.4), (C.5) 解族 $\tilde{y}(t,r)$ 的存在. 如果 Γ 取充分大, 则 $B<K$. 在矩形 $0\leqslant x\leqslant 1$, $|\tilde{y}|\leqslant K$ 上讨论. 从初始点 $(0,y^0)$ 画两条曲线, 它们在初始点的斜率分别为 r_1 和 r_2, 并有 $\tilde{y}(1,r_1)<y^1<\tilde{y}(1,r_2)$. 这两条曲线都落在这矩形里. 根据 $\tilde{y}(t,r)$ 对 r 的连续性, 可以找到 r^*, 使得 $\tilde{y}(1,r^*)=y^1$. 这样引理证毕.

往下将证明定理 C.1. 在区域 $\bar{D}$ 上作 $\beta(t)$, $\alpha(t)$ 使它们满足定理 C.1 的条件.

取函数 $\tilde{F}(\tilde{y},t)$ 为下面形式

$$\tilde{F}(\tilde{y},t)=\begin{cases}F(\beta,t)+\dfrac{\tilde{y}-\beta}{1+\tilde{y}^2}, & \tilde{y}>\beta,\\ F(\tilde{y},t), & \alpha\leqslant\tilde{y}\leqslant\beta,\\ F(\alpha,t)+\dfrac{\tilde{y}-\alpha}{1+\tilde{y}^2}, & \tilde{y}<\alpha,\end{cases}\tag{C.10}$$

所以定义的函数 $\tilde{F}(\tilde{y},t)$ 在任意 $|\tilde{y}|<\infty$ 上有定义, 并且关于 $\tilde{y}$ 连续. 事实上

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\tilde{y},t)\big|_{\tilde{y}=\beta^-}&=\tilde{F}(\tilde{y},t)\big|_{\tilde{y}=\beta^+},\\ \tilde{F}(\tilde{y},t)\big|_{\tilde{y}=\alpha^-}&=\tilde{F}(\tilde{y},t)\big|_{\tilde{y}=\alpha^+}.\end{aligned}$$

又因为 $\lim_{\tilde{y}\to\pm\infty}\tilde{F}(\tilde{y},t)=F(\beta,\alpha,t)$, 所以 $\tilde{F}(\tilde{y},t)$ 一致有界. 此外当 $|\tilde{y}|<\infty$ 时, 函数 (C.10) 关于 y 的导数按段连续和一致有界, 这是因为

$$\tilde{F}_{\tilde{y}}(\tilde{y},t)=\begin{cases}\dfrac{1-\tilde{y}^2+2\beta\tilde{y}}{(1+\tilde{y}^2)^2}, & \tilde{y}>\beta,\\ F_{\tilde{y}}, & \alpha\leqslant\tilde{y}\leqslant\beta,\\ \dfrac{1-\tilde{y}^2+2\alpha\tilde{y}}{(1+\tilde{y}^2)^2}, & \tilde{y}>\alpha.\end{cases} \tag{C.11}$$

在 $\tilde{y}=\alpha$, $\tilde{y}=\beta$ 处导数不存在, 但是左右导数都存在, 且有界. 例如在 $\tilde{y}=\beta$ 处

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\tilde{y}}|_{\beta-}&=F_{\tilde{y}}(\beta,t),\\ \tilde{F}_{\tilde{y}}|_{\beta+}&=1/(1+\beta^2).\end{aligned}$$

有 $\lim_{|\tilde{y}|\to\infty}\tilde{F}_{\tilde{y}}=0$. 这样就验证了条件 $[H_1]$—$[H_3]$ 都满足. 问题 (C.3) 的解就存在. 也就是说存在连接 $(0,y^0)$ 和 $(1,y^1)$ 的曲线 $\tilde{y}(t)$. 如果该曲线在 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 之间. 则 $\tilde{F}(\tilde{y},t)=F(\tilde{y},t)$, $\tilde{y}(t)$ 就是问题 (C.1) 的解, 定理证毕. 但是连接 $(0,y^0)$,$(1,y^1)$ 的曲线可以走出以 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 为上下界的区域.

不妨假设解曲线有部分走出了下边界 $\alpha(t)$, 那么解 $\tilde{y}(t)$ 与函数 $\alpha(t)$ 的图像至少相交两次, 在 $(0,1)$ 存在这样的点 t^*, 在 t^* 上 $\tilde{y}-\alpha$ 有负的最小值, 即 $\tilde{y}'-\alpha'=0$, 并且

$$\tilde{y}''(t^*)-\alpha''(t^*)\geqslant 0, \tag{C.12}$$

另一方面, 因为 $\tilde{y}<\alpha$, 根据 (C.10)

$$\tilde{y}''(t^*)-F(\alpha(t^*),t^*)-\frac{\tilde{y}(t^*)-\alpha(t^*)}{1+\tilde{y}^2(t^*)}=0.$$

而

$$\alpha''(t^*)-F(\alpha(t^*),t^*)\geqslant 0.$$

由此推出

$$\tilde{y}''(t^*)-\alpha''(t^*)-\frac{\tilde{y}(t^*)-\alpha(t^*)}{1+\tilde{y}^2(t^*)}\leqslant 0,$$

也就是说

$$\tilde{y}''(t^*)-\alpha''(t^*)\leqslant\frac{\tilde{y}(t^*)-\alpha(t^*)}{1+\tilde{y}^2(t^*)}\leqslant 0$$

这与 (C.11) 矛盾, 这就是意味着 $\tilde{y}(t)$ 不可能与 $\alpha(t)$ 相交. 同样可以证明 $\tilde{y}(t)$ 也不可能走出边界 $\beta(t)$.

这样 $\tilde{y}$ 就只能在 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 之间, 即 $\tilde{y}$ 是 (C.1) 的解, Nagumo 定理证毕.

在许多情况下我们是用推广的 Nagumo 定理.

(1) 如果方程右端含有 y', 即 $y'' = F(y', y, t)$, 则对 F 的要求要加强, 例如要求存在正函数 $\Phi(y')$, 有

$$|F(y', y, t)| < \Phi(y'),$$

而积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi \mathrm{d}\xi}{\Phi(\xi)}$$

要求发散.

(2) 如果上下解是不光滑的, 那么在 $\beta'(t)$ 的间断点要满足不等式:

$$\frac{\mathrm{d}\beta^{(-)}}{\mathrm{d}t} \geqslant \frac{\mathrm{d}\beta^{(+)}}{\mathrm{d}t},$$

在 $\alpha'(t)$ 的间断点要满足不等式:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha^{(-)}}{\mathrm{d}t} \leqslant \frac{\mathrm{d}\alpha^{(+)}}{\mathrm{d}t},$$

这里 "(−)" 是左导数, "(+)" 是右导数.

在研究其他奇摄动边值问题时, Nagumo 定理会有各种不同形式.

参考文献

[1] Васильева А.Б, Бутузов А.Ф. Асимптотическиеразложения решений сингулярно возмущенных уравнений [M]. Москва: Наука, 1973.

[2] Тихонов А.Н, Озависимости решенийдифференциальных уравнений отмалого параметра[J]. Матем. Сб. 1948, 22(64):193–204.

[3] Васильева А.Б, Осистемах двух сингулярновозмущенных квазилинейныхуравнений второго порядка[J]. Ж. Вычисл. Матем. И матем. Физики, 2004, 44(4):677–689.

[4] Васильева А.Б, Пантелеева О.И. Система сингулярновозмущенных квазилинейныхобыкновенныхдифференциальныхуравнений второго порядка вкритических случаях[J]. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 2006, 46(4): 593–604.

[5] Ни Минь Кань, Васильева А.Б, Пантелеева О.И, Осистеме двух сингулярновозмущенныхквазилинейныхуравнений второго порядка вкритическом случае[J]. Ж. Вычисл. Матем. И матем. Физики, 2005, 45(10):1818–1825.

[6] Васильева А.Б Бутузов А.Ф, Сингулярно возмущенные уравнения вкритических случаях[M]. Москва: Изд-во МГУ, 1978.

[7] Васильева А.Б, Бутузов В.Ф, Асимптотические методы в теории сингулярныхвозмущений[J]. Москва: Высшаяшкола, 1990.

[8] Васильева А.Б, Бутузов В.Ф, Нефедов Н.Н, Контрастные структуры всингулярно возмущенных задачах[J]. Фундаментальная иприкладная зматематика, 1998, 4(3):799–851.

[9] Васильева А.Б, Давыдова М.А, О контрастнойструктуре типа ступеньки дляодного класса нелинейныхсингулярно возмущенных уравнений второго порядка[J]. Ж. Вычисл. Матем. И матем. Физики, 1998, 38(6):938–947.

[10] Васильева А.Б, Оконтрастных структурах типаступеньки для системы сингул-

ярно возмущенныхуравнений [J]. Ж. Вычисл. Матем. и матем. физики, 1994, 34(10): 1401–1411.

[11] Васильева А.Б, Контрастные структуры всистемах трех сингулярновозмущенных уравнений[J]. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1999, 39(12): 2007–2018.

[12] Васильева А.Б, Внутрений слой в краевойзадаче для системы двухсингулярно возмущенных уравнений второго порядка с одинаковым порядкомсингулярности [J]. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 2001, 41(7): 1067–1077.

[13] Бутузов В.Ф, Васильева А.Б, Об асимптотикерешения типа контрастнойструктуры[J]. Матем. заметки, 1987, 42(6): 831–841.

[14] Васильева А.Б, Орешениях сингулярно возмущенных задач, имеющихконтрастную структуру типавсплеска[J]. Фундамент. Иприкладн. Матем., 1995, 1(1): 109–122.

[15] G.D.Brikhoff, *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter* [J]. Trans. Amer. Math. Soc, 1908, 219–231.

[16] N.N.Bogolyubov and Yu.A.Mitropolskii, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear, Oscillations* [M]. Hindustan, Dslhi, 1961.

[17] A.M.Ilyin, *Matching of asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems* [J]. American Mathematical Society,Providence, RI, 1992.

[18] S.A.Lomov, *Introduction to the General Theory of Singular Perturbations* [J]. American Mathmatical Society Providence, RI, 1992.

[19] V.P.M.Aslov, *Complex WBK-method for nonlinear equations* [M]. Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).

[20] E.F.Mishchenko and N.K.H.Rozov, *Differential Equations with Small parameter and Relaxation Oscillations* [M]. Plenum Press, New York,1980.

[21] V.V.S Trygin and V.A.Sobolev, *ecomposition of motions by means of the integral manifold method* [M]. Nauka, Moscow, 1988(in Russian).

[22] A.N.Tikhonov, *The dependence of the solutions of differential equations on a small parameter* [J]. Math Sb, 22(1948), 193–204.

[23] A.N.Tikhonov, *On systems of differential equations containing parameters* [J]. Math. Sb, 27(1950), 147–156.

[24] A.N.Tikhonov, *Systems of differential equations containing small parameters multiplying some of derivatives* [J]. Math, Sb, 31(1952), 575–586.

[25] V.A.Trenogin, *Development and applications of the Lyusternik-Vishik asymptotic method* [J]. Russian Math Surveys, 25(1970), 119–156.

[26] A.B.Vasil'eva and V.F.Butuzov, *Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations* [M]. Nauka, Moscow, 1973(in Russian).

[27] A.B.Vasil'eva and V.F.Butuzov, *Singularly Perturbed Equations in the Critical Case* [M]. University of Wisconsin, Madison, 1980, MRCTSR 2039.

[28] A.B.Vasil'eva and V.F.Butuzov, *Asymptotic Methods in Singular Pertubation Theory* [M]. Vischaja Shkola, Moscow, 1990(in Russian).

[29] A.B.Vasil'eva and M.G.Dmitriev, *Singular Perturbations in Optimal Control Problems* [J]. Itogi Nauki Tekhniki, 20, VINITI, Moscow, 1973, 3–77(in Russian).

[30] M.I.Vishik and L.A.Lyusternik, *Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter multiplying the highest derivatives* [J]. Amer. Math Soc. Transl. 20(1962), 239–364.

[31] V.A.Volosov and B.I.Morgunov, *Averaging Methods in the Theory of Nonlinear Oscillating Systems* [M]. Moscow State University, Moscow, 1971.

[32] Пятницкий А.Л, Чечкин Г.А., Шамаев А.С. Усреднение методы и приложения [M]. НовосибирскТамара Рожковская, 2007.

[33] Тихонов А.Н, Озависимости решенийдифференциальных уравнений отмалого параметра [J]. Матем. с б. 1948. Т. 22(2):193–204.

[34] Васильева А.Б, Вутузов В. Ф. Асимптотическиеразложения решений сингулярно-возмущенных уравнений [M].: Наука. 1973.

[35] Васильева А.Б, Вутузов В.Ф. Асимптотическиеметоды в теории сингулярных-возмущений [M].: Высшая школа. 1990.

[36] Нефедов Н.Н, Методдифференциальных неравенств для некоторых сингулярно-возмущенных задач в частныхпроизводных [J]. Дифференц. Уравнения.– 1995. 31(4):719–722.

[37] Нефедов Н.Н, Методдифференциальных неравенств для некоторых классовне-линейных сингулярновозмущенных задач свнутренними слоями [J]. Дифференц. Уравнения.– 1995, 31(7):1132–1139.

[38] Васильева А.Б, Авдеев А.С. О контрастнойструктуре типа ступеньки длясистемы двух сингулярновозмущенных уравнений второгопорядка [J]. Ж. вычис. матем. иматем. Физики. 1996, 36(5):75–89.

[39] Васильева А.Б, Контрастные структуры типаступеньки для сингулярновозмущенного дифференциальногоуравнения второго порядка, линейного относительнопроизводных [J]. Ж. вычис. матем. и матем. Физики, 1995, 35(4):520–531.

[40] Васильева А.Б, Оконтрастных структурах типаступеньки для системысингулярно возмущенных уравнений [J]. Ж. вычис. матем. иматем. Физики. 1994, 34(10):1401–1411.

[41] Васильева А.Б, Тупчиев В.А. О периодическихрешениях системыдифференциальных уравнений смалым параметром припроизводной, близких кразрывным [J]. Докл. АН СССР, 1968. Т.178. №4. С.767–770.

[42] Васильева А.Б, Оконтрастных структурах всистемах сингулярно возмущенных уравнений [J]. Ж. вычис. матем. и матем. Физики. 1994. Т.34. №8–9. С.1168–1178.

[43] Васильева А.Б, Аникеева В.А. Контрастныеструктуры в системахсингулярно возмущенных уравнений [J]. Теория иприложения методов малогопараметра (конференция, посвещенная 90-летию со днярождения академика А.Н. Тихонова), обнинск, 1996. С.17.

[44] Васильева А.Б, Оконтрастных структурах типаступеньки для обыкновенных дифференциальных уравнений [J]. Теория и приложения методовмалого параметра (конференция, посвещенная 90-летию со днярождения академика А.Н. Тихонова), обнинск, 1996. С. 16.

[45] Васильева А.Б, К вопросу о контрастныхструктурах для системысингулярно возмущенных уравнений [J]. Ж. вычис. матем. иматем. Физики. 1997. Т.37. №1. С.74–84.

[46] Васильева А.Б, Нефедов Н.Н., Радченко И.В. Сингулярновозмущенная задача с внутренним переходным слоем [J]. Ж. вычис. матем. и матем. Физики. 1996. Т.36. №9. С.105–111.

[47] Бутузов В.Ф, Васильева А.Б. Об асимптотикерешения типа контрастнойструктуры [J]. Матем. Заметки. 1987. Т.42. №6. С.31–41.

[48] Бутузов В.Ф, Васильева А.Б. Об асимптотической теории контрастных пространстных структур [J]. Ж. вычис. матем. и матем. Физики. 1988. Т.28. №3. С.346–361.

[49] Нефедов Н.Н, Контрастные структуры и ихприложения в задачах омежфазовых переходах [J]. Труды вторых математическихчтений МГСУ. Москва. 1994. С.30–31.

[50] Нефедов Н.Н, Методдифференциальных неравенств для нелинейных сингулярновозмущенных задач сконтрастными структурами типаступеньки в критическом случае [J]. Дифференц. Уравнения. 1996. Т.32. №11.С.1–9.

[51] Нефедов Н.Н, Двумерные контрастные структуры типа ступеньки: асимптотика, существование, устойчивость [J]. Докл. АН. 1996. Т.349. №5. С.603–605.

[52] V.F.Butuzov, *Contrast structure solutions of nonlinear singularly perturbed equations* [J]. Proceedings of the Workshop Intern. Seminar on Appl. Math.1991. Dresden. P. 27–31.

[53] Нефедов Н.Н, Контрастные структуры типавсплеска в нелинейныхсингулярно возмущенныхпараболических уравнениях [J]. Докл. АН. 1994. Т.336.№2. С.168–170.

[54] Бутузов В.Ф, Нефедов Н.Н. Пространственно-периодическиеконтрастные структуры всингулярно возмущенныхэллиптических задачах [J]. Докл. АН. 1996. Т.351. №6. С.1–4.

[55] Бутузов В.Ф, Контрастные структуры типавсплеска в параболическойсистеме двух сингулярновозмущенных уравнений [J]. Ж. вычис. матем. и матем. физики. 1997. Т.37. №4. С.415–428.

[56] A.B.Vasil'eva, V.F.Butuzov and N.N.Nefedov, *The contrast structures type solutions of nonlinear singularly perturbed equations* [J]. Proceedings of IMACS. Amsterdam: North Holland / Elsiver, 1992. P. 439–445.

[57] Бутузов В.Ф, Онеустойчивости контрастныхструктур типа всплеска [J]. Труды вторых математическихчтений МГСУ. Москва. 1994. С.14–18.

[58] Васильева А.Б, Квопросу об устойчивостирешений типа контрастныхструктур

[J]. Матем. Моделирование. 1990. Т.2. №.1. С.119–125.

[59] Петров А.П, Обустойчивости контрастныхструктур типа всплеска инекоторых решений спогранслоями [J]. Труды вторых матем. Чтений МГСУ. Москва. 1994. С.18–19.

[60] Васильева А.Б, Обустойчивости контрастныхструктур [J]. Матем. Моделирование. 1991. Т.3. №4. С.114–123.

[61] Васильева А.Б, Орешениях сингулярно возмущенных задач, имеющихконтрастную структуру типавсплеска [J]. Фундамент. Иприкладн. Матем. 1995. Т.1. №1. С.109–122.

[62] Васильева А.Б, Никитин А.Г, Петров А.П, Асимптотический методисследования контрастныхструктур и его приложение к теории гидромагнитногодинамо [J]. Матем. Моделирование. 1995. Т.7. №2. С.61–71.

[63] Васильева А.Б, Контрастные структуры с двумя переходными слоями типа ступеньки и ихустойчивости [J]. Ж. вычис. матем. и матем. Физики. 1992. Т.32. №10. С.1582–1593.

[64] Файф П., Гринли В, Внутренние переходные слои для эллиптических краевыхзадач с малым параметром [J]. УМН. 1974. Т.29. №4. С.103–131.

[65] M.Nagum, *über die Differenzialgleichung* [J]. Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1937. V. 19. P. 861–866.

[66] Чанг К, Хауэс Ф, Нелинейные сингулярновозмущенные краевые задачи. Теория и приложения [M].: Мир. 1988.

[67] P.Fife, M.Tang, *Comparision Principles for Reaction-Diffusion Systems: Irregular Comparision Functions and Application to Question of Stability and Speed of Propagation of Disturbances* [J].

[68] H.Amann, *On the existence of positive solutions of nonlinear ellipticboundary value problems* [J]. Indiana Univ. Mat. J. 1971. V. 21, No. 2. P. 125–146.

[69] Нефедов Н.Н, Контрастные структуры типавсплеска в нелинейныхсингулярно возмущенныхэллиптических уравнениях [J]. Докл. АН СССР. 1992. Т.327. №1. С.16–19.

[70] Лоскутов А.Ю, Михайлов А.С. Введение всинергетику [M].: Наука. 1990.

[71] Васильева А.Б., Бутузова А.В, Об устойчивостистационарных решений с пограничными и внутреннимислоями [J]. Математическиеметоды и их приложения (Трудытретьих математических чтенийМГСУ 24–29 января 1995). Москва: МГСУ. 1995. С.81–86.

[72] P.C.Fife, *Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters* [J]. Arch. Rat. Mech. And Anal. 1973. V. 52, No.3. P. 205–232.

[73] A.B.Vasil'eva, A.Nikitin and A.Petrov, *Stability of contrasting solutions of nonlinear hydromagnetic dynamo equations and magnetic fields reversals in galaxies* [J]. Geophysical and astrophysical fluid dynamics. 1994. V. 78. P. 261–279.

[74] Васильева А.Б, Никитин А.Г. К вопросу обустойчивости периодическихкон-

трастных структур впространственно двумерном случае [J]. Дифференциальные-уравнения. 1996. Т .32. №10. С.1355–1361.

[75] Ни Минь Кань, М.Г. Дмитриев, Контрастныеструктуры в простейшейвекторной вариационной задачеи их асимптотика [J]. Автоматика и телемеханика. 1998. №5. С.41–52.

[76] Ни Минь Кань, М.Г. Дмитриев, Асимптотикаконтрастных экстремалей впростейшей векторнойвариационной задаче [J]. Фундаментальная и Прикладная-Математика. 1998. Т.4. Выпуск 4. С.1165–1178.

[77] Былокопытов С.В, Дмитриев М.Г, Решение классическихзадач оптимального управленияс погранслоем [J]. Автоматикаи телемеханика. 1989. №7. С.71–82.

[78] Кротов В.Ф, Гурман В.И. Методы и задачиоптимального управления [M].: Наука. 1973.

[79] Nagumo M.. *Under die Differential equations* $y'' = f(x, y, y')$[J].: Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1937, 19:861–866.

[80] Васильева А.Б., Есипова В.А. О расширении класса условно устойчивыхсингулярно возмущенных систем, допускающих применение методапограничных функтсии [J]. Дифференциальные уравнения, 1975, 11(7):1159–1174.

[81] Васильева А.Б. Дмитриев М.Г. Определение структуры обобщенного решения нелинейной задачи оптимальногоуправления [J]. ДАН СССР, 1980, 250(3):525–528.

[82] Васильева А.Б., Павельев А.В. О существовании решенийтипа контрастных структур [J]. Ж. Вычисл. Матем. И матем. Физики, 1990, 30(1):72–86.

[83] Ни Минь Кань и др. О контрастной структуретипа ступеньки для задачивариационного исчисления[J]. Ж. вычисл. матем. и матем. Физики, 2004, 44(7):1269–1278.

[84] Есипова В.А. Асимптотика решения общей краевой задачи для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференцчальных уравнений условно устойчивого типа[J]. Дифф. Уравнения, 1975, 11(11):1956–1966.

[85] 林武忠, 汪志鸣. 奇摄动边值问题的解对给定数据导数的渐近分析 [J]. 华东师大学报, 2006 年第一期, 20–22.

[86] Wang Z., Lin W.. *The Dirichlet problem for a quasilinear singularly perturbed second order system* [J]. JMAA, 1996, 201:897–910.

[87] Schmeiser C. and Weiss R.. *Asymptotic analysis of singular singularly perturbed BVPs* [J]. SIAM J. Math.Anal., 1986, 17:560–579.

索引

郑重声明

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

反盗版举报传真：(010) 82086060

E-mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号
高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编：100120

购书请拨打电话：(010) 58581118